

1	<u>DAS MAGNETISCHE FELD STATIONÄRER STRÖME</u>	4
1.1	<u>GRUNDLAGEN</u>	4
1.2	<u>DIE MAGNETISCHEN FELDGRÖßEN</u>	4
1.3	<u>DIE MAGNETISCHE INDUKTION ALS KRAFTVERMITTELNDE GRÖßE</u>	5
1.3.1	<i>Kraft auf bewegte Ladungsträger, Lorentzkraft</i>	5
1.3.2	<i>Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im homogenen Induktionsfeld</i>	6
1.3.3	<i>Kraft zweier stromdurchflossener, paralleler Leiter</i>	8
1.3.4	<i>Drehmoment auf eine stromdurchflossene Leiterschleife im homogenen Magnetfeld</i>	12
1.3.5	<i>Der Hall-Effekt</i>	15
1.4	<u>DIE MAGNETISCHE FELDSTÄRKE</u>	16
1.5	<u>DAS DURCHFLUTUNGSGESETZ</u>	17
1.6	<u>DER MAGNETISCHE FLUß</u>	20
1.7	<u>MATERIE IM MAGNETFELD</u>	23
1.7.1	<i>Einfaches Modell der magnetischen Wirkung der Materie</i>	23
1.7.2	<i>Diamagnetismus</i>	23
1.7.3	<i>Paramagnetismus</i>	24
1.7.4	<i>Ferromagnetismus</i>	24
1.8	<u>MAGNETISCHES FELD AN GRENZFLÄCHEN</u>	26
1.9	<u>DER MAGNETISCHE KREIS</u>	29
2	<u>ZEITLICH VERÄNDERLICHE FELDER</u>	35
2.1	<u>DER INDUKTIONSVORGANG AN BEWEGLICHEN LEITERN</u>	35
2.2	<u>DAS INDUKTIONSGESETZ</u>	37
2.2.1	<i>Beispiele zur Induktion in Leiterschleifen</i>	39
2.2.2	<i>Lenz'sche Regel</i>	43
2.3	<u>INDUKTIVITÄT, SELBSTINDUKTION VON LEITERSCHLEIFEN</u>	45
2.4	<u>ENERGIE DES MAGNETISCHEN FELDES</u>	52
2.4.1	<i>Die Energiedichte im magnetischen Feld</i>	53
2.4.2	<i>Berechnung der Induktivität aus der magnetischen Energie</i>	54
2.4.3	<i>Kraft auf die Grenzflächen des Luftspalts eines Magnetkreises</i>	57
2.5	<u>GEGENINDUKTION, GEGENINDUKTIVITÄT, TRANSFORMATOR</u>	59
2.6	<u>REIHEN- UND PARALLELSCHALTUNG VON SPULEN</u>	63
2.6.1	<i>Ideale, ungekoppelte Spulen</i>	63
2.6.2	<i>Zwei ideale, gekoppelte Spulen</i>	64
2.6.3	<i>Parallelschaltung zweier gekoppelter, verlustfreier Spulen</i>	65
3	<u>BERECHNUNG VON WECHSELSTROMSCHALTUNGEN</u>	66
3.1	<u>PERIODISCHE ZEITABHÄNGIGE GRÖßEN</u>	66
3.1.1	<i>Mittelwerte periodischer Größen</i>	66
3.2	<u>HARMONISCHE WECHSELGRÖßEN</u>	68
3.3	<u>ZEIGERDARSTELLUNG HARMONISCHER WECHSELGRÖßEN</u>	69
3.4	<u>DER EINGESCHWUNGENE ZUSTAND LINEARER WECHSELSTROMSCHALTUNGEN</u>	71
3.5	<u>HARMONISCHE WECHSELGRÖßEN ALS KOMPLEXE EFFEKTIVWERTZEIGER</u>	75
3.5.1	<i>Komplexe Zahlen und Größen</i>	75
3.5.2	<i>Abbildung einer harmonischen Zeitfunktion in einen komplexen Effektivwertzeiger</i>	76

3.6	<u>BERECHNUNG DES EINGESCHWUNGENEN ZUSTANDS LINEARER NETZWERKE MIT KOMPLEXEN EFFEKTIVWERTZEIGERN</u>	77
3.6.1	<u>Ströme und Spannungen an linearen Zweipolen im eingeschwungenen Zustand</u>	79
3.6.2	<u>Zusammengesetzte Zweipole</u>	82
3.7	<u>DIE LEISTUNG IM WECHSELSTROMFALL</u>	84
3.7.1	<u>Komplexe Leistung</u>	87
3.7.2	<u>Leistungsmessung</u>	88
3.7.3	<u>Leistungsanpassung</u>	88
3.7.4	<u>Blindleistungskompensation</u>	89
4	<u>WECHSELSTROMNETZWERKE</u>	93
4.1	<u>TIEFPAß, HOCHPAß</u>	93
4.1.1	<u>Tiefpaß</u>	93
4.1.2	<u>Hochpaß</u>	98
4.2	<u>RESONANZKREISE</u>	101
4.2.1	<u>Serienresonanz</u>	101
4.2.2	<u>Parallelresonanz</u>	104
5	<u>DIE HOMOGENE DOPPELLEITUNG</u>	108
5.1	<u>DIE LEITUNGSGLEICHUNGEN DER HOMOGENEN DOPPELLEITUNG</u>	108
5.2	<u>ABGESCHLOSSENE LEITUNG</u>	113
5.3	<u>VERLUSTLOSE LEITUNG</u>	115
5.3.1	<u>Kurzgeschlossene, verlustlose Leitung</u>	115
5.3.2	<u>Offene, verlustlose Leitung</u>	118
5.3.3	<u>Mit Reaktanz X_2 abgeschlossene, verlustlose Leitung</u>	119
5.3.4	<u>Mit Ohmschem Widerstand R_2 abgeschlossene, verlustlose Leitung</u>	119

1 Das magnetische Feld stationärer Ströme

1.1 Grundlagen

Im magnetischen Feld werden auf Eisen, Kobalt, Nickel oder deren Legierungen Kräfte ausgeübt. Magnetische Eigenschaften können auf diese Materialien übertragen werden. Die Kräfte zwischen den unterschiedlichen Magnetpolen erinnern an Kräfte zwischen elektrischen Ladungen. Allerdings ist keine Trennung der Pole möglich. Das magnetische Feld kann durch Feldlinien (Kraftlinien) dargestellt werden. Die Richtung der Feldlinien ist durch eine Magnetnadel feststellbar. Es wurde willkürlich festgelegt, daß der Nordpol die positive Orientierung der Feldlinien anzeigt. Experimente zeigen, daß die magnetischen Feldlinien geschlossen sind. Es existieren offensichtlich keine Quellen und Senken des Magnetfelds. Es handelt sich demnach um ein **Wirbelfeld**.

Magnetit oder Magneteisenstein $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ war bereits im Altertum als Ursache magnetischer Kraftwirkungen bekannt und wurde wahrscheinlich nach dem Fundort Magnesia in Kleinasien benannt. *Thales von Milet* (624-546 v. Chr.) berichtete als erster über die anziehende Wirkung des „Magnetsteins“ (und auch über die elektrische Anziehung des Bernsteins). In China gehen erste Kenntnisse magnetischer Wirkungen bereits auf das 6. Jh. v. Chr. zurück. *Guang Zhong* berichtet als Zeitgenosse von Thales über die wunderbaren magnetischen Wirkungen. Im 3. Jh. vor Christus wurden Löffel aus Magnetit, deren Stiel sich nach Süden ausrichtete, für magische Zwecke verwendet. Für Navigationszwecke waren sie allerdings nicht brauchbar.

Erstmals wird von *Alexander Neckam* (1157-1217) über die Nutzung von Magnetnadeln zur Navigation berichtet. Der Kreuzritter *Peregrinus* berichtet um 1270 über die Kraftwirkungen gleichnamiger und ungleichnamiger Pole und über das Entstehen von Teilmagneten mit ungleichnamigen Polen bei Teilung eines Magneten. Außerdem gibt er technische Konstruktionsdetails verschiedener Kompaßarten an. *William Gilbert* (1544-1603) entdeckt das Magnetfeld der Erde.

1820 entdeckt *Hans Christian Oerstedt* (1777-1851) die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes (Elektro-Magnetismus). Ebenfalls 1820 berichtet *André Marie Ampère* (1775-1836) über die Kraftwirkung stromdurchflossener Leiter aufeinander. Seine „Elementarstromhypothese“ führt alle magnetischen Erscheinungen auf elektrische Ströme zurück. Insbesondere wird die Wirkung der Materie durch *Molekularströme* beschrieben. 1831 beschreibt *Michael Faraday* (1791-1867) den Induktionseffekt und 1834 den Effekt der Selbstinduktion. *James Clerk Maxwell* (1831-1879) entwickelt 1864 seine Theorie des elektromagnetischen Feldes und faßt diese 1873 in seinem Lehrbuch „A Treatise on Electricity and Magnetism“ zusammen. Er sagt die Existenz „Elektromagnetischer Wellen“ voraus, die 1888 von *Heinrich Hertz* (1857-1894) experimentell nachgewiesen werden. Mit der Idee zur Dynamomaschine (1867) legt *Werner von Siemens* (1816-1892) den Grundstein für die elektrische Energietechnik.

1.2 Die magnetischen Feldgrößen

Beim elektrischen Feld und beim stationären Strömungsfeld existieren jeweils zwei vektorielle Feldgrößen, die durch die Materialgleichungen miteinander verknüpft sind. Das stationäre magnetische Feld wird ebenfalls durch zwei vektorielle Feldgrößen beschrieben:

Magnetische Flußdichte, magnetische Induktion: \vec{B} , $[\vec{B}] = 1 \text{Vs m}^{-2} = 1 \text{T}$ (Tesla),

magnetische Feldstärke: \vec{H} , $[\vec{H}] = 1 \text{ Am}^{-1}$.

Im freien Raum gilt exakt der Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (1.1)$$

Dabei ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (1.2)$$

die **Permeabilitätskonstante** des freien Raumes. Für lineare, isotrope Materialien lautet die Materialgleichung:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (1.3)$$

μ_r ist die **relative Permeabilitätskonstante** des Materials. Materialien für die $\mu_r < 1$ gilt, werden als **diamagnetische** Materialien bezeichnet. Gilt $\mu_r > 1$, handelt es sich um **paramagnetische** Materialien. In beiden Fällen gilt $\mu_r \approx 1$.

Ferromagnetische Materialien wie Eisen, Kobalt, Nickel und deren Legierungen zeigen einen sehr ausgeprägten Paramagnetismus. Für diese gilt $\mu_r \gg 1$, wobei wegen des stark nichtlinearen und auch anisotropen Verhaltens, die lineare Materialgleichung (1.3) nur eine sehr begrenzte Gültigkeit hat. Eine ausführliche Darstellung der magnetischen Materialeigenschaften folgt in Kapitel 1.7.

1.3 Die magnetische Induktion als kraftvermittelnde Größe

1.3.1 Kraft auf bewegte Ladungsträger, Lorentzkraft

Im magnetischen Feld wird eine Kraft auf bewegte Ladungsträger ausgeübt, die nach ihrem Entdecker als **Lorentzkraft** bezeichnet wird. Das Experiment zeigt, daß die Induktion die Kraft vermittelnde Größe ist. Unter der Voraussetzung $v \ll c$ liefert das Experiment (vgl. Abbildung 1.1) folgende Ergebnisse:

- $F \sim q, F \sim B, F \sim v$
- $F \sim \sin \alpha$
- Richtung von \vec{F} senkrecht zu der von \vec{B} und \vec{v} aufgespannten Ebene. Der positive Richtungssinn ergibt sich dabei aus der Bewegung einer Rechtsschraube wenn \vec{v} in Richtung \vec{B} gedreht wird. Die Ergebnisse können wie folgt zusammengefaßt werden:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.4)$$

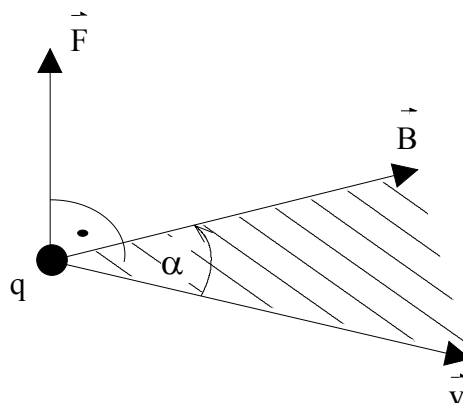


Abbildung 1.1: Lorentzkraft auf bewegten Ladungsträger

Die Lorentzkraft wird beispielsweise bei der Fernsehbildröhre zur Ablenkung eines Elektronenstrahls genutzt. In Abbildung 1.2 ist das Funktionsprinzip dargestellt. Die Kathode emittiert thermische Elektronen. Diese werden aufgrund des elektrischen Feldes zwischen Anode und Kathode in Richtung auf die Anode beschleunigt. Durch die Öffnung im Zentrum der Anode wird ein fokussierter Elektronenstrahl mit der mittleren Elektronengeschwindigkeit \bar{v} erzeugt. Nach Durchlaufen der Potentialdifferenz zwischen Anode und Kathode besitzen die Elektronen die kinetische Energie

$$W_{el} = \frac{1}{2} \cdot m_{el} \cdot \bar{v}^2 = |e| \cdot U_{ak}, \quad (1.5)$$

unter der Voraussetzung, daß $\bar{v} \ll c$ gilt. Daraus folgt mit der Elektronenmasse $m_{el} = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ und der Elektronenladung $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ für die Elektronengeschwindigkeit:

$$\bar{v} = \sqrt{2 \frac{e \cdot U_{ak}}{m_{el}}}. \quad (1.6)$$

Die Ablenkung des Elektronenstrahls erfolgt durch Überlagerung von Magnetfeldern zweier Ablenkspulen, die so angeordnet sind, daß \vec{B}_x die Ablenkung in x-Richtung und \vec{B}_y die Ablenkung in y-Richtung bewirkt. Die Elektronen treffen gezielt auf die gewünschte Position des Bildschirms, geben ihre kinetische Energie ab und bewirken damit das Aufleuchten eines Bildpunkts. Sie werden danach von der Hilfsanode „eingesammelt“.

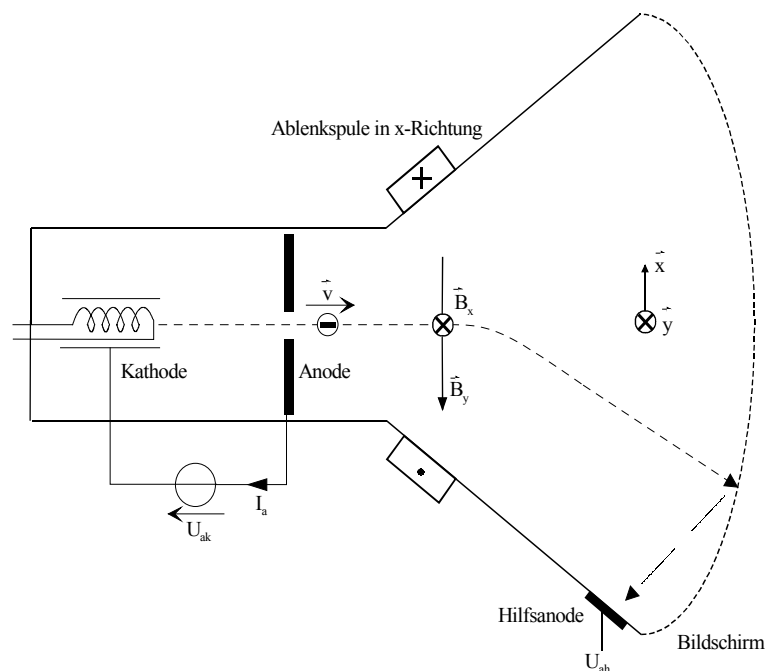


Abbildung 1.2: Funktionsprinzip einer Fernsehbildröhre

1.3.2 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im homogenen Induktionsfeld

Die Kraft auf stromdurchflossene Leiter rührt offensichtlich von der Kraft auf bewegte Ladungsträger her, denn es existiert keine entsprechende Kraftwirkung auf nicht vom Strom durchflossene Leiter.

In Abbildung 1.3 ist ein Ausschnitt eines langgestreckten, stromdurchflossenen Leiters dargestellt. Die Ladungsträger bewegen sich mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} längs des Leiters. Auf die Ladungsträger im Leiterabschnitt ds wirkt damit eine Kraft

$$d\vec{F} = dQ \cdot (\bar{v} \times \vec{B}) = dQ \cdot \left(\frac{v}{ds} d\vec{s} \times \vec{B} \right). \quad (1.7)$$

Mit $|\bar{v}| = \frac{ds}{dt}$ folgt:

$$d\vec{F} = \frac{dQ}{dt} (d\vec{s} \times \vec{B}) = I (d\vec{s} \times \vec{B}). \quad (1.8)$$

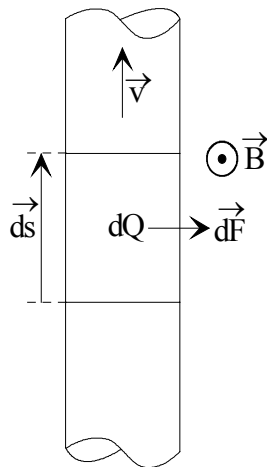


Abbildung 1.3: Langgestreckter stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld

Die Kraft auf ein Leiterelement der Länge ds wirkt senkrecht zur Achsrichtung des Leiters, die in positiver Stromrichtung positiv gezählt wird und senkrecht zum Vektor der Flußdichte. Für einen langgestreckten Leiter der Länge l , der von einem Strom I durchflossen wird, ergibt sich damit die Kraft:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \quad \text{mit} \quad \vec{l} = l \frac{d\vec{s}}{ds} \quad (1.9)$$

Als Beispiel ist in Abbildung 1.4 ein stromdurchflossener Leiterstab im Luftspalt einer elektrischen Maschine dargestellt. Mit der Leiterstablänge $l = 10\text{cm}$, der Induktion im Luftspalt $B_L = 0,5\text{ T}$ und dem Leiterstabstrom $I = 10\text{ A}$ ergibt sich als Kraft auf den Leiterstab:

$$F = |\vec{F}| = \left| I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \right| = 10\text{ A} \cdot 0,1\text{ m} \cdot 0,5\text{ Vs m}^{-2} = 0,5\text{ Vs m}^{-1} = 0,5\text{ N}.$$

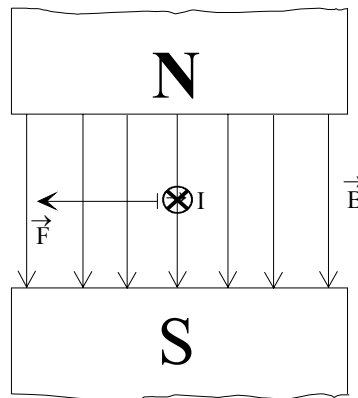


Abbildung 1.4: Leiterstab im Luftspalt einer elektrischen Maschine

1.3.3 Kraft zweier stromdurchflossener, paralleler Leiter

Ampère hat gezeigt, daß jeder elektrische Strom mit einem Magnetfeld verkettet ist. Daraus folgt, daß stromdurchflossene Leiter Kräfte aufeinander ausüben, da sich jeder Leiter im Magnetfeld befindet, das von dem oder den anderen Leitern erzeugt wird.

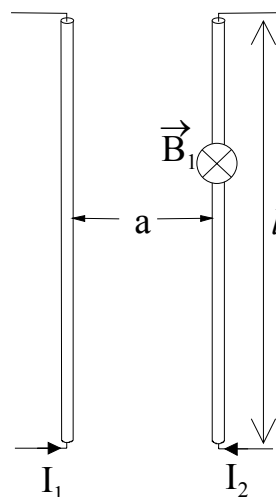


Abbildung 1.5: Experiment zur Bestimmung der Kraft, die zwei lange, parallele Leiter aufeinander ausüben.

Diese Kraft soll mit einem Experiment gemäß Abbildung 1.5 bestimmt werden. Beide Leiter seien starr, sehr lang und der Abstand der Leiter sei hinreichend klein ($l \gg a$), so daß die Wirkung der Stromzuführung auf die Leiter vernachlässigt werden kann. Leiter 2 befindet sich im Induktionsfeld, das von Leiter 1 erzeugt wird und umgekehrt. Verschwindet einer der Leiterströme, zeigt das Experiment keine Kraftwirkung. Sind die Ströme gleich gerichtet, ziehen sich beide Leiter an. Bei entgegengesetzter Stromrichtung stoßen sich beide Leiter ab. Für beliebige Ströme ergibt das Experiment

$$F = \mu_0 \frac{l}{2\pi a} I_1 \cdot I_2, \quad (1.10)$$

wobei eine anziehende Kraft positiv gezählt wird.

Das Experiment zeigt, daß die vom Leiter 1 herrührende Induktion \vec{B}_1 senkrecht auf Leiter zwei steht und in die Zeichenebene hineinweist (vgl. Abbildung 1.5). Daraus folgt nach (1.9) eine anziehende Kraft auf Leiter 2:

$$F_2 = I_2 \cdot l \cdot B_1 \quad (1.11)$$

Aus (1.10) folgt für die Induktion des Leiters 1 erzeugt am Ort des Leiters 2:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}. \quad (1.12)$$

Untersucht man das Magnetfeld eines langgestreckten, stromdurchflossenen Linienleiters mit einer Magnetnadel, so zeigt sich, daß die Induktionslinien konzentrische Kreise um die Leiterachse bilden. Der Vektor der magnetischen Induktion ist tangential gerichtet. Die Richtung der Induktionslinien und die Stromrichtung bilden dabei eine Rechtsschraube (vgl. Abbildung 1.6). Daraus und mit (1.12) ergibt sich allgemein für das Magnetfeld eines langgestreckten Leiters im Abstand r von der Leiterachse:

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (1.13)$$

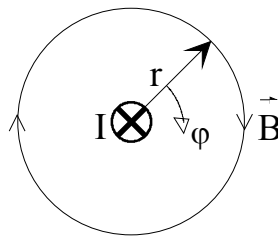


Abbildung 1.6: Induktionslinien um langgestreckten Leiter

Es soll nun als Beispiel die Kraft berechnet werden, die zwei langgestreckte, parallele Leiterabschnitte im Abstand $a=1\text{m}$ mit einer Länge von $l=1\text{m}$ aufeinander ausüben, wenn sie in gleicher Richtung jeweils vom Strom $I=1\text{A}$ durchflossen werden. Mit (1.10) folgt:

$$F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi \cdot a} \cdot l = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{1\text{A}^2}{2\pi \cdot 1\text{m}} \cdot 1\text{m} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{VA}\cdot\text{s}}{\text{m}} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-7} \text{N}}} \quad (1.14)$$

Dies entspricht exakt der Versuchsanordnung zur Definition der SI-Einheit 1A der elektrischen Stromstärke.

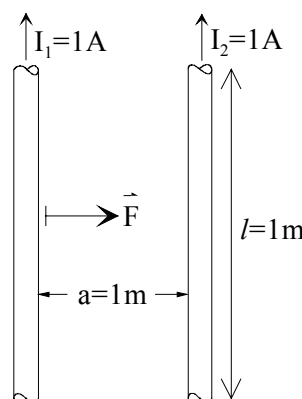


Abbildung 1.7: Zur Definition der Einheit der Stromstärke

Ein langgestrecktes, linienförmiges Leiterstück ($r \ll l$) kann über die Kraftmessung zur Messung der magnetischen Induktion verwendet werden. Nach (1.9) ist die Kraft maximal, wenn Leiterachse und magnetische Induktion senkrecht aufeinander stehen. Demnach kann mit die-

ser Anordnung, die als **Induktionswaage** bezeichnet wird, die magnetische Induktion nach Betrag und Richtung bestimmt werden.

Mit der Induktionswaage kann nun das Feld der magnetischen Induktion für interessierende Leiteranordnungen experimentell untersucht werden. Beispielhaft soll das Feld einer Zylinderspule in Luft, wie sie in Abbildung 1.8 im Querschnitt dargestellt ist, untersucht werden. Es handele sich um eine kreisförmige, eng und gleichmäßig bewickelte Zylinderspule mit Zylinderradius R . Der Leiterquerschnitt sei im Vergleich zum Zylinderradius vernachlässigbar ($r \ll R$). Die Wicklung mit Windungszahl n verteilt sich gleichmäßig auf die Länge l der Spule. Unter diesen Voraussetzungen spricht man von einer **idealen Zylinderspule**.

In der Wicklung fließe der Spulenstrom I . Das Experiment mit der Induktionswaage ergibt:

- Im Innern ist das Induktionsfeld näherungsweise homogen. Die z-Komponente der Induktion ist näherungsweise konstant. Alle weiteren Komponenten verschwinden näherungsweise: $B_{zi} \approx const$, $B_{xi} \approx B_{yi} \approx 0$. Die Stromrichtung in der Windung und der Induktionsvektor bilden eine Rechtsschraube.
- Das Induktionsfeld im Außenraum ist näherungsweise vernachlässigbar: $B_a \approx 0$.
- Für die z-Komponente der Induktion in der Spule ergibt sich durch Variation der Parameter: $B_{zi} \sim I$, $B_{zi} \sim n$, $B_{zi} \sim \frac{1}{l}$. Daraus folgt $B_z \sim \frac{nI}{l}$
- Als Proportionalitätskonstante wird μ_0 ermittelt. Damit folgt für die magnetische Induktion im Spulennern:

$$\vec{B}_i = (0, 0, B_{zi}), B_{zi} = \mu_0 \frac{n \cdot I}{l} \quad (1.15)$$

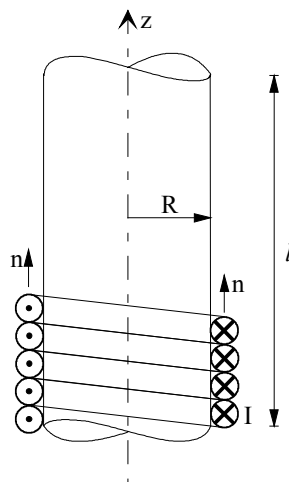


Abbildung 1.8: Zylinderspule

Betrachtet man (1.15), so ist das Induktionsfeld im Innern der Spule von einem Term

$$I' = \frac{n \cdot I}{l} \quad (1.16)$$

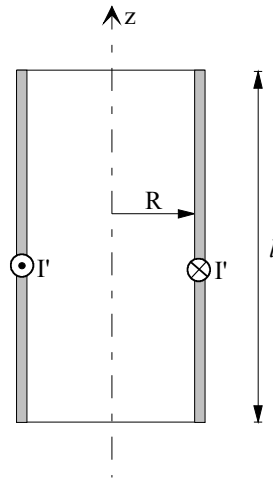


Abbildung 1.9: Ersatz des Wicklungsstroms durch einen Flächenstrom

abhängig. Die Windungszahl kann frei gewählt werden, wenn nur das Produkt $n \cdot I$ unverändert bleibt, und wenn der Strom möglichst gleichverteilt auf der Zylinderoberfläche in einer sehr dünnen Wicklungsschicht fließt. Denkbar ist, daß der Strom in einer sehr dünnen Leitschicht mit einer Windung auf der Zylinderoberfläche fließt, wie dies in Abbildung 1.9 dargestellt ist. Der Wicklungsstrom wird hier durch einen Flächenstrom in der Leitschicht mit der Flächenstromdichte I' (Dimension: Strom pro Länge) identisch ersetzt und es gilt damit:

$$B_{zi} = \mu_0 I', \quad [I'] = 1Am^{-1}. \quad (1.17)$$

Ein Zylinder mit einem Flächenstrom der Flächenstromdichte I' auf dem Zylindermantel ist offensichtlich ein geeignetes Modell für eine ideale Zylinderspule.

Abbildung 1.10 zeigt die Darstellung des Feldlinienbildes einer Zylinderspule, wie es sich mit Eisenfeilspänen gewinnen läßt. Im Äußeren gleicht das Feld dem Induktionsfeld eines Stabmagneten. Die Induktion ist allerdings erheblich niedriger als im Innenraum.

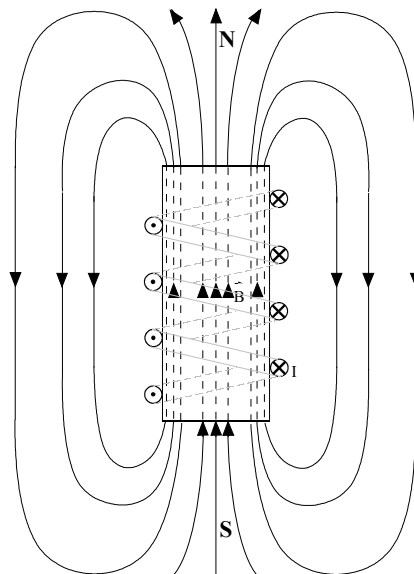


Abbildung 1.10: Feldlinienbild der Zylinderspule

1.3.4 Drehmoment auf eine stromdurchflossene Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

Gemäß Abbildung 1.11 wird eine stromdurchflossene, rechteckige Leiterschleife, die um eine Achse drehbar ist, in ein homogenes Magnetfeld gebracht. Die Kräfte auf die Rechteckseiten der Länge l sind nach (1.9) entgegengesetzt gerichtet und von gleichem Betrag:

$$|\vec{F}| = I \cdot |\vec{l} \times \vec{B}| = I \cdot l \cdot B, \text{ da } \vec{l} \perp \vec{B}.$$

Für das Drehmoment um die Drehachse folgt:

$$|\vec{M}_D| = 2 \cdot F' \cdot \frac{b}{2} = F \cdot b \cdot |\cos(90^\circ - \vartheta)| = F \cdot b \cdot |\sin \vartheta|,$$

$$|\vec{M}_D| = I \cdot l \cdot b \cdot B \cdot |\sin \vartheta| = I \cdot A \cdot B \cdot |\sin \vartheta|. \tag{1.18}$$

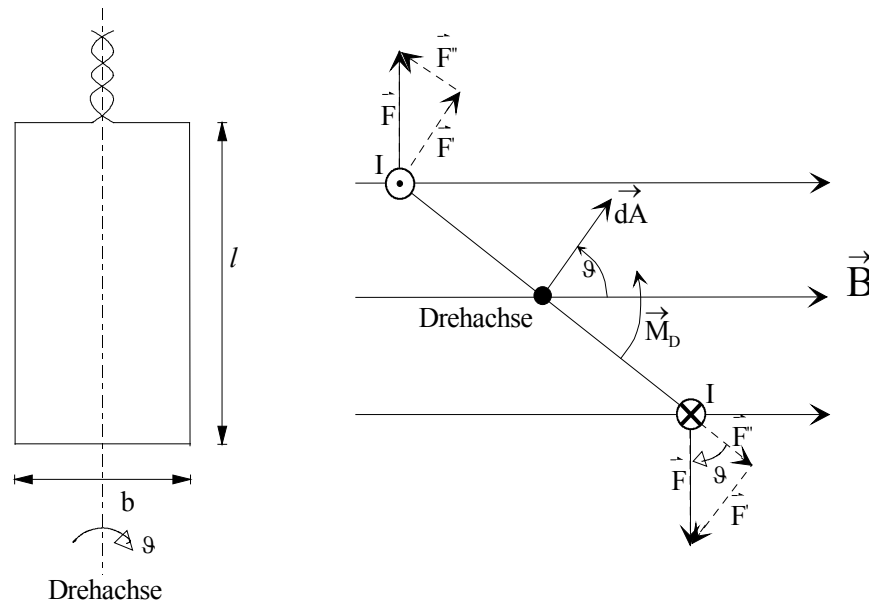


Abbildung 1.11: Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

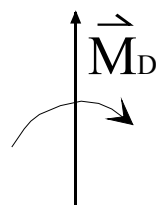


Abbildung 1.12: Drehmoment als Vektor

Experimente mit verschiedenen Flächen der Leiterschleife zeigen, daß das Drehmoment nicht von der Form der Fläche sondern lediglich von der Fläche abhängig ist. Wird das Drehmoment als Vektor aufgefaßt, der gemäß Abbildung 1.12 rechtsschraubend mit der Drehrichtung verknüpft ist, und ist der Flächenvektor \vec{A} im Sinn einer Rechtsschraube mit dem Strom verknüpft, dann versucht sich der Flächenvektor in Richtung des \vec{B} -Feldes zu drehen und es gilt:

$$\vec{M}_D = I \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (1.19)$$

Prinzip der Drehfeldmaschine

Aufgrund des wirkenden Drehmoments versucht sich die Normale der Leiterschleife in Richtung des Magnetfeldes einzurichten. Mit einem Drehstromsystem oder im Gleichstromfall mit einem Stromwender (Kommutator) kann ein Induktionsfeld erzeugt werden, das sich um die Spulenchse dreht. Man spricht von einem **Drehfeld**. Wird die Achse der Leiterschleife nicht gebremst, dreht sie sich mit dem Magnetfeld. Wird die Achse der Leiterschleife gebremst, stellt sich ein Winkel ϑ (Polradwinkel) zwischen Schleifennormalen und Induktionsfeld so ein, daß Antriebsmoment und Bremsmoment im Gleichgewicht sind:

$$M_D = -M_B = n \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \sin \vartheta = K \cdot I \cdot B \cdot \sin \vartheta \quad (1.20)$$

(1.20) berücksichtigt eine Windungszahl n der Leiterschleife. Üblicherweise handelt es sich nicht um eine Luftspule. Vielmehr wird das Induktionsfeld in einem Luftspalt zwischen Ständer und Rotor einer elektrischen Maschine erzeugt. Unabhängig davon gilt (1.20) prinzipiell. Der Faktor K ist dabei eine konstruktionsabhängige Konstante.

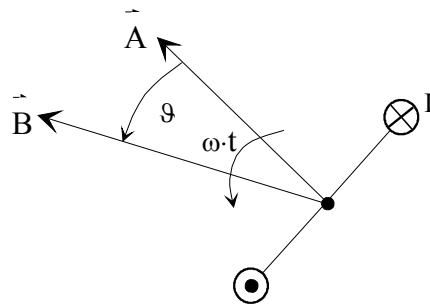


Abbildung 1.13: Polradwinkel ϑ bei Belastung der Leiterschleife mit einem Bremsmoment

Das maximal von der Maschine an der Achse abgegebene Moment ergibt sich für den Polradwinkel $\vartheta = 90^\circ$ und wird als Kippmoment

$$M_{\text{Kipp}} = K \cdot I \cdot B, \quad M_D = M_{\text{Kipp}} \cdot \sin \vartheta \quad (1.21)$$

bezeichnet. Wird die Maschine über das Kippmoment belastet, bleibt der Rotor stehen, die Maschine „kippt“. Der Zusammenhang zwischen Polradwinkel und Drehmoment ist in Abbildung 1.14 grafisch dargestellt. Für die von der Maschine gelieferte mechanische Leistung ergibt sich, wenn mit ω die Winkelgeschwindigkeit des Drehfelds bezeichnet wird:

$$P = \omega \cdot M_D = \omega \cdot M_{\text{Kipp}} \cdot \sin \vartheta = P_{\text{Kipp}} \cdot \sin \vartheta. \quad (1.22)$$

Die maximale von der Maschine gelieferte Leistung ergibt sich für $\vartheta = 90^\circ$ (Kippleistung). Wird mehr Leistung verlangt, bleibt der Rotor stehen. Wird der Rotor in Drehrichtung angetrieben, eilt der Rotor dem Drehfeld voraus, und der Polradwinkel wird negativ. Nach (1.22) wird die gelieferte Leistung negativ, d.h., die Maschine nimmt mechanische Leistung auf und liefert entsprechend elektrische Leistung. Damit wirkt die Maschine als Erzeuger elektrischer Energie (Generator).

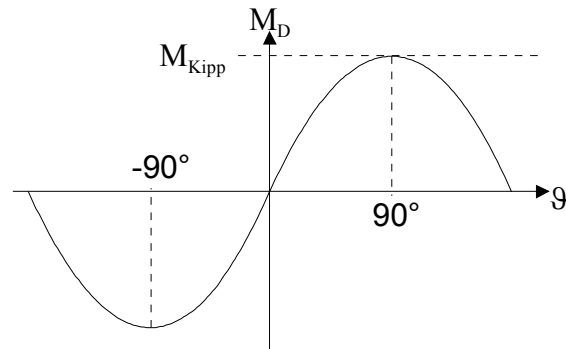


Abbildung 1.14: Drehmoment in Abhängigkeit vom Polradwinkel

Prinzip des Drehspulmeßwerks

Gemäß (1.18) ergibt sich für das Drehmoment einer Leiterschleife im homogenen Feld: $M_D \sim I \cdot \sin \vartheta$. Es liegt nahe, das Drehmoment zur Messung des Stromes in der Leiterschleife zu verwenden. Nachteilig ist die funktionale Abhängigkeit des Drehmoments vom Drehwinkel ϑ .

In Abbildung 1.15 ist der prinzipielle Aufbau eines Drehspulmeßwerks dargestellt. Eine drehbare Spule befindet sich im Luftspalt eines von einem Dauermagneten erregten Magnetkreises. Obwohl es sich um ein inhomogenes Magnetfeld handelt, ist der Betrag der Induktion im Luftspalt näherungsweise konstant, wenn man von der starken Inhomogenität zwischen den Polen des Permanentmagneten absieht. Zudem steht der Induktionsvektor, unabhängig vom Drehwinkel der Spule, senkrecht auf dem Normalenvektor der Spulenfläche, solange der Drehwinkel begrenzt bleibt.

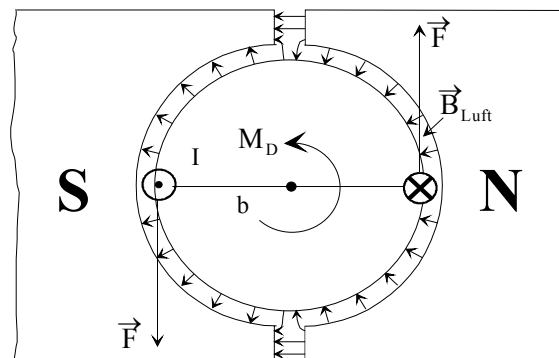


Abbildung 1.15: Prinzipaufbau eines Drehspulmeßwerks

Für die Kraft auf die Leiter des Spulenrahmens ergibt sich bei einer Windungszahl n :

$$|\vec{F}| = n \cdot I \cdot |\vec{l} \times \vec{B}| = n \cdot I \cdot l \cdot B. \quad (1.23)$$

Daraus folgt für das Drehmoment:

$$|\vec{M}_D| = 2 \cdot |\vec{F}| \cdot \frac{b}{2} = n \cdot I \cdot A \cdot B. \quad (1.24)$$

Wird jetzt eine Drehfeder angebracht, deren Federmoment $M_F = -c_F \cdot \vartheta$ dem Drehmoment entgegenwirkt, stellt sich ein Momentengleichgewicht ein

$$M_F + M_D = n \cdot I \cdot A \cdot B - c_F \cdot \vartheta = 0, \quad (1.25)$$

und es ergibt sich der Drehwinkel ϑ zu:

$$\vartheta = \frac{n \cdot A \cdot B}{c_F} \cdot I = c \cdot I. \quad (1.26)$$

Der Drehwinkel ist proportional zum Strom durch die Drehspule. Dabei wird c als die Empfindlichkeit des Meßwerks bezeichnet. Auf einer entsprechenden Skala kann der Strom abgelesen werden. Über den ohmschen Widerstandes R_M der Drehspule kann die Spannungsmessung auf eine Strommessung zurückgeführt werden:

$$I = \frac{U}{R_M}. \quad (1.27)$$

Der Meßbereich ergibt sich aus dem maximalen Drehwinkel ϑ_{\max} , für die die Linearität von (1.22) noch hinreichend gewährleistet ist:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R_M} = \frac{\vartheta_{\max}}{c}. \quad (1.28)$$

1.3.5 Der Hall-Effekt

Die Lorentzkraft macht sich in Leitern und Halbleitern durch den sogenannten Hall-Effekt (E.H. Hall, 1855-1938) bemerkbar, der zu einer Spannung quer zum Stromfluß führt. In Abbildung 1.16 ist ein dünner bandförmiger (Halb-)Leiter mit homogener Stromverteilung dargestellt. Das Induktionsfeld \vec{B} ist senkrecht zur Oberfläche des Leiters gerichtet. Die seitlichen Kontaktierungen sind auf Klemmen ausgeführt.

Unter Annahme positiver Ladungsträger bewegen sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit v in Stromrichtung. Mit den gegebenen Orientierungen hat die Lorentzkraft nur eine x -Komponente

$$F_x = q \cdot v \cdot B, \quad (1.29)$$

die die Ladungsträger zum rechten Rand hin ablenkt. Hierdurch entsteht eine entgegengesetzte elektrische Feldstärke. Im stationären Zustand kompensiert die elektrische Feldstärke die Lorentzkraft:

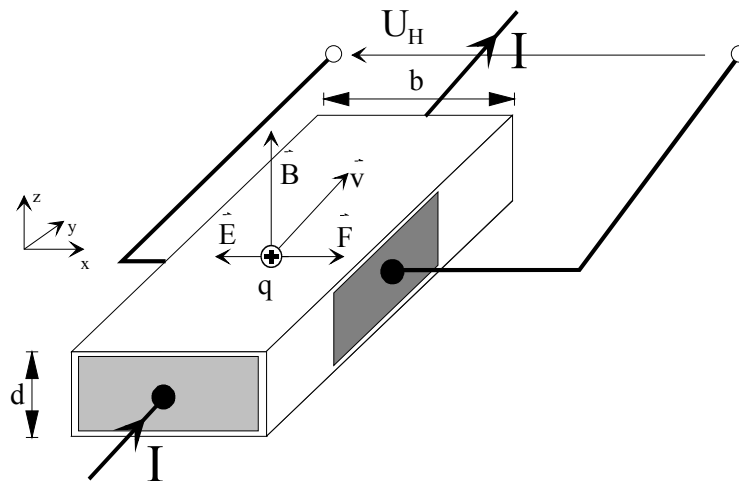
$$q \cdot E_x = -q \cdot v \cdot B. \quad (1.30)$$

Das elektrische Feld bewirkt die Hallspannung, die an den seitlichen Kontakten abgegriffen werden kann:

$$U_H = -E_x \cdot b = v \cdot B \cdot b. \quad (1.31)$$

Bezeichnet man die Dichte der freien Ladungsträger im Leiter mit ρ ergibt sich für die Stromdichte J :

$$J = \frac{dQ}{dt \cdot dA} = \frac{\rho \cdot d\tau}{dt \cdot dA} = \frac{\rho \cdot dA \cdot ds}{dt \cdot dA} = \rho \cdot \frac{ds}{dt} = \rho \cdot v. \quad (1.32)$$


Abbildung 1.16: Hall-Effekt

Damit folgt aus (1.31):

$$U_H = \frac{J}{\rho} \cdot B \cdot b = \frac{I}{d \cdot b \cdot \rho} \cdot B \cdot b = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

$\frac{1}{\rho}$ wird als Hallkonstante bezeichnet. Sie charakterisiert die Leitungseigenschaft des Leiters bzw. Halbleiters. Bei metallischen Leitern ist ρ sehr hoch, (z.B. $\rho_{\text{Cu}} \approx 14 \cdot 10^{-3} \frac{\text{As}}{\text{cm}^3}$), so daß die Hall-Spannung sehr gering ist.

$$\text{Beispiel für Cu: } J = 10 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}, \quad d = 1 \text{cm}, \quad B = 0,2 \text{T}, \quad U_{\text{HCu}} = 14,3 \cdot 10^{-9} \text{V}.$$

Bei Halbleitern ist die Dichte der Ladungsträger erheblich niedriger als bei Leitern.

$$\text{Beispiel: Niedrig dotiertes Silizium mit } N = 10^{15} \text{cm}^{-3}, \quad \rho = e \cdot N, \quad U_{\text{HSi}} \approx 1,25 \text{V}.$$

Bei Halbleitern ist der Hall-Effekt um den Faktor $10^6 \dots 10^{10}$ größer als bei Metallen. Hall-Generatoren aus Halbleitermaterial werden zur Messung der magnetischen Induktion verwendet. Außerdem können über den Halleffekt bei definiertem Magnetfeld die Ladungsträgerdichten in Halbleitermaterialien bestimmt werden.

1.4 Die magnetische Feldstärke

Mit räumlich sehr kleinen, idealen Zylinderspulen kann ein existierendes Magnetfeld lokal kompensiert und damit auch charakterisiert werden (vgl. Abbildung 1.17). Die Kompensation kann mittels einer Induktionswaage festgestellt werden. Offensichtlich muß die Spule so im Raum orientiert sein, daß sie ein Induktionsfeld erzeugt, das dem existierenden Induktionsfeld entgegengerichtet ist. Maßgeblich für das von der idealen Zylinderspule erzeugte Magnetfeld ist nach (1.17) die Flächenstromdichte I' auf dem Zylindermantel der Spule.

Das Magnetfeld im Punkt P wird offensichtlich durch die Stromdichte I' charakterisiert. I' hat durch die Orientierung der Spule im Raum Vektorcharakter. Da die Spule das Feld kompensiert, ist die Richtung des Vektors entgegengesetzt zur Spulenrichtung. Die so definierte vektorielle Feldgröße

$$\vec{H}, \quad \text{mit } |\vec{H}| = I' \tag{1.33}$$

wird als magnetische Feldstärke bezeichnet.

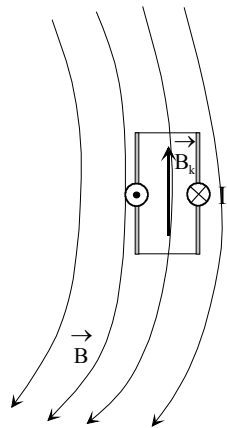


Abbildung 1.17: Lokale Kompensation des Magnetfelds mit einer idealen Zylinderspule

Im Vakuum und näherungsweise in Luft gilt der lineare Zusammenhang (1.1) zwischen Induktion (Flußdichte) und magnetischer Feldstärke.

Die magnetische Feldstärke wird offensichtlich auf die felderzeugende Wirkung des elektrischen Stromes zurückgeführt und wird demnach als **Quantitätsgröße** bezeichnet. Die magnetische Induktion wird hingegen durch die Kraft auf stromdurchflossene Leiter beschrieben. Sie wird daher als **Intensitätsgröße** bezeichnet.

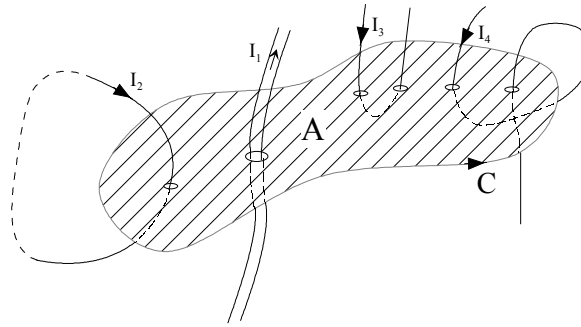
1.5 Das Durchflutungsgesetz

Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und den felderzeugenden Strömen wird in sehr einfacher Form durch das **Durchflutungsgesetz** beschrieben, das an Hand von Abbildung 1.18 erläutert werden soll. Dort ist ein geschlossener Umlauf c im Raum dargestellt, in den eine Fläche A eingespannt ist. Mehrere stromdurchflossene Leiter durchstoßen diese Fläche. Der Strom I_2 durchstößt einmal die Fläche und ist offensichtlich mit der Randkurve „verkettet“. Man zählt die Verkettung positiv, wenn die Umlaufrichtung der Randkurve und die „Durchstoßrichtung“ des Stromes durch die Fläche eine Rechtschraube bilden, wie dies bei I_2 der Fall ist. Der Strom I_1 ist demnach negativ mit c verkettet. Der Strom I_3 durchstößt A zweimal, und zwar je einmal in positiver und in negativer Richtung. Er ist mit c nicht verkettet. Er kann herausgezogen werden, ohne daß c geöffnet werden muß. Der Strom I_4 durchstößt A zweimal in positiver Richtung. Er ist demnach zweimal mit c verkettet. Die vorzeichenrichtige Summe der mit c verketteten Ströme wird als Durchflutung Θ bezeichnet. Für die Abbildung 1.18 ergibt sich demnach:

$$\Theta = I_1 - I_2 + I_3 - I_3 - 2 \cdot I_4 = I_1 - I_2 - 2 \cdot I_4 \quad (1.34)$$

Das Durchflutungsgesetz sagt nun aus, daß das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke über einen beliebigen geschlossenen Weg c gleich der Durchflutung der Kurve c ist:

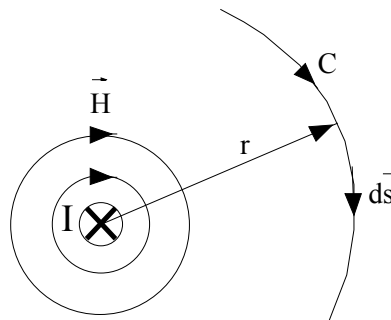
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta. \quad (1.35)$$


Abbildung 1.18: Durchflutungsgesetz

Mit dem Durchflutungsgesetz kann nur in Fällen bestimmter Symmetrie die magnetische Feldstärke bestimmt werden. Dies ist einsichtig, da (1.35) lediglich eine skalare Gleichung darstellt, die Feldstärke jedoch ein Vektor mit 3 Komponenten ist.

Beispiel: Feld eines langgestreckten, kreiszylindrischen Leiters mit Radius R

Aus Experimenten mit Eisenteilspänen bzw. mit Magnetnadeln weiß man, daß die magn. Feldlinien konzentrische Kreise um die Leiterachse bilden. Wählt man einen dieser Kreise als Randkurve c , sind \vec{H} und $d\vec{s}$ in jedem Punkt der Kurve parallel (oder antiparallel) gerichtet. Für das Skalarprodukt gilt damit auf der Kurve c : $\vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot ds$. In Abbildung 1.19 wurde die Randkurve so orientiert, daß sich eine positive Durchflutung durch den Strom I ergibt.


Abbildung 1.19: Langgestreckter Leiter mit Feldlinien und gewählter Randkurve

Aus Symmetriegründen ist der Betrag von H in jedem Punkt der Kurve konstant. Zudem sind H und der Wegvektor ds parallel gerichtet. Damit gilt außerhalb des Leiters ($r > R$) für das Durchflutungsgesetz:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_c H \cdot ds = H_c \cdot \oint_c ds = H_c \cdot 2\pi r = \Theta = I. \quad (1.36)$$

Für die magnetische Feldstärke außerhalb des Leiters folgt damit:

$$H_c = H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad r > R. \quad (1.37)$$

Innerhalb des Leiters gelten entsprechende Symmetriebedingungen, allerdings ist die Durchflutung Θ jetzt vom Radius r abhängig. Bei homogener Stromverteilung gilt für die Stromdichte im Leiter:

$$|\vec{J}| = \frac{I}{\pi \cdot R^2}. \quad (1.38)$$

Die Randkurve c mit Radius r wird vom Strom

$$\Theta = J \cdot \pi \cdot r^2 = I \cdot \frac{r^2}{R^2} \quad (1.39)$$

durchflutet. Damit gilt:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_c \cdot 2\pi r = \Theta = I \cdot \frac{r^2}{R^2}, \quad (1.40)$$

$$H(r) = I \cdot \frac{r}{2\pi R^2}, \quad r \leq R. \quad (1.41)$$

Für $r=R$ sind beide berechneten Feldstärken identisch.

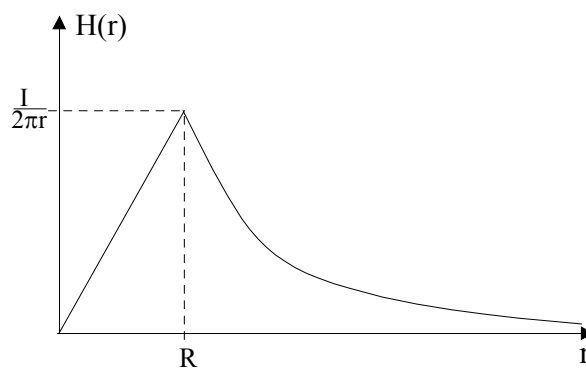


Abbildung 1.20: Magnetische Feldstärke eines langgestreckten Leiters mit Radius R

1.6 Der magnetische Fluß

Wir sind davon ausgegangen, daß die magnetische Induktion keine Quellen oder Senken hat. Die Induktionslinien sind demnach geschlossen. In einem Gedankenexperiment stelle man sich jetzt Röhren vor, deren Mantel von Feldlinien der Induktion gebildet werden. Da die Induktion quellenfrei ist, umfassen sie immer die gleiche Anzahl an Induktionslinien. Abbildung 1.21 zeigt eine derartige Röhre im Längs- und im Querschnitt. Obwohl im stationären Magnetfeld keine Transportvorgänge stattfinden, drängt sich das Bild einer Strömung auf, wenn man die Induktionslinien als Strömungslinien betrachtet. Tatsächlich spricht man vom **Induktionsfluß**, teilweise auch **magnetischer Fluß** genannt (vgl. Kap. 5, Verschiebungsfluß). Die Dichte der Induktionslinien ist offensichtlich ein Maß für den Fluß pro Querschnittsfläche oder die **Flußdichte**. Da die Dichte der Induktionslinien gleichzeitig den Betrag der magnetischen Induktion darstellt, wird diese häufig auch als **magnetische Flußdichte** bezeichnet.

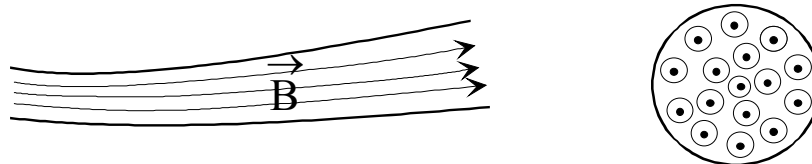


Abbildung 1.21: Feldröhren der magnetischen Induktion, Flußröhre

In Abbildung 1.22 wird der Fluß durch ein kleines, ebenes Flächenstück betrachtet. Der Induktionsvektor wird in Komponenten normal und tangential zur Fläche zerlegt. Lediglich die Normalkomponente trägt zum Fluß bei und es gilt für den magnetischen Fluß $\Delta\Phi$ durch das Flächenstück:

$$\Delta\Phi = B_n \cdot |\Delta A| = |\vec{B}| \cdot |\Delta A| \cdot \cos\alpha = \vec{B} \cdot \vec{\Delta A}. \quad (1.42)$$

Dabei ist der Fluß positiv, wenn Flächenvektor und Induktionsvektor einen Winkel kleiner als 90° einschließen.

Soll der Fluß durch eine beliebige Fläche A bestimmt werden, wird die Fläche in kleine, ebene Flächenelemente zerlegt, wie dies in Abbildung 1.23 für dreieckförmige Flächenelemente dargestellt ist. Deren Flußanteile gemäß (1.42) werden aufsummiert:

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \cdot \vec{\Delta A}_i. \quad (1.43)$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ werden die Flächenelemente infinitesimal ($\Delta A_i \rightarrow 0$) und die Summe geht in das Flächenintegral des Vektors \vec{B} über die Fläche A über:

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \cdot \vec{\Delta A}_i = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (1.44)$$

Die Einheit des magnetischen Flusses ergibt sich zu

$$[\phi] = [B] \cdot [A] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{Vs} = 1 \text{Wb (Weber)}. \quad (1.45)$$

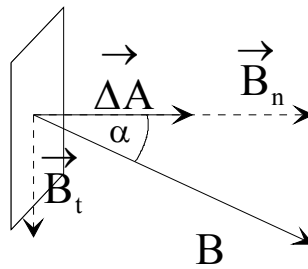


Abbildung 1.22: Fluß durch ein ebenes Flächenstück

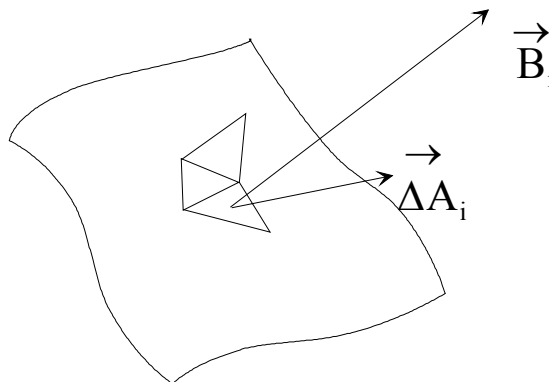


Abbildung 1.23: Fluß durch eine beliebige Fläche

Beispiel: Fluß einer idealen Zylinderspule in Luft mit Länge l , Radius R , Strom I

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_A B \cdot dA = B \cdot A = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot I}{l} \cdot A = \mu_0 \frac{n \cdot I}{l} \cdot \pi \cdot R^2$$

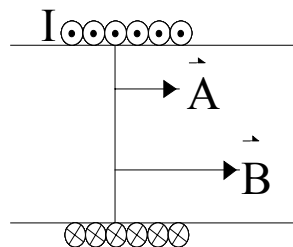


Abbildung 1.24: Fluß einer idealen Zylinderspule

In eine Randkurve c kann nach Abbildung 1.25 eine beliebige Anzahl an Flächen eingespannt werden. Es ist vereinbart, daß der Umlaufsinn der Randkurve und die Orientierung der Flächen im Sinn einer Rechtsschraube zusammenhängen. Offensichtlich ist der Fluß durch jede der in die Randkurve c eingespannten Flächen gleich, da alle Flußröhren die durch A hin-

durchtreten, ebenso durch A' hindurchtreten. Der Fluß ist demnach nicht von der Fläche sondern lediglich von der Randkurve abhängig:

$$\phi_{(A')} = \phi_{(A)} = \phi_{(C)}. \quad (1.46)$$

Es folgt daraus, daß der in eine geschlossene Hüllfläche „einströmende“ Fluß gleich dem aus dieser Hülle ausfließende Fluß ist. Der **Satz vom Hüllenfluß** besagt damit, daß der Gesamtfluß durch eine geschlossene Hüllfläche verschwindet:

$$\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.47)$$

Das magnetische Feld ist demnach quellenfrei.

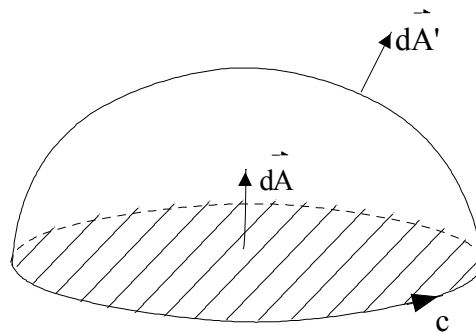


Abbildung 1.25: Zum Satz vom Hüllenfluß

1.7 Materie im Magnetfeld

Gemäß dem Ampère'schen Ansatz ist jedes Magnetfeld auf die Wirkung von elektrischen Strömen zurückzuführen. Die magnetische Wirkung der Materie wird auf atomare Kreisströme zurückgeführt, die sich durch den Drehimpuls der Elektronen auf ihren Bahnen und durch den Eigendrehimpuls der Elektronen (Spin) ergeben. Das Durchflutungsgesetz berücksichtigt jedoch nur makroskopische Ströme.

1.7.1 Einfaches Modell der magnetischen Wirkung der Materie

Neben der magnetischen Feldstärke \vec{H} , die über das Durchflutungsgesetz mit den makroskopischen Strömen verknüpft ist, existiert in Materie eine zusätzliche magnetische Erregung \vec{M} , die als Magnetisierung bezeichnet wird, und die von den atomaren Kreisströmen herrührt.

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (1.48)$$

Dieses Modell, bei dem \vec{M} zunächst von \vec{H} unabhängig ist, beschreibt lineares, nichtlineares und anisotropes Verhalten von Materie, ohne auf die Ursachen einzugehen.

Isotropes Verhalten: \vec{B} und \vec{H} sind parallel gerichtet, daraus folgt daß \vec{H} und \vec{M} parallel gerichtet sind,

Anisotropes Verhalten: \vec{H} , \vec{B} , \vec{M} sind nicht parallel gerichtet,

Lineares Verhalten: $|\vec{H}| \sim |\vec{M}| \sim |\vec{B}|$.

Im Vakuum gilt:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (1.49)$$

Für lineare, isotrope Materie folgt mit

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H} : \quad (1.50)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi \cdot \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{H}. \quad (1.51)$$

Die Proportionalitätskonstante χ wird als **Suszeptibilität** des Materials bezeichnet. Lineare, isotrope Materie kann durch eine materialabhängige Permeabilitätskonstante μ beschrieben werden.

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = (1 + \chi) \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (1.52)$$

Die relative Permeabilität bzw. Permeabilitätszahl μ_r charakterisiert das Material:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = (1 + \chi) \cdot \mu_0, \quad (1.53)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi. \quad (1.54)$$

1.7.2 Diamagnetismus

Atome, bei denen sich die Drehimpulse sämtlicher Elektronen paarweise kompensieren, bilden keine Elementarmagnete. Erst durch ein äußeres Magnetfeld wird die Kompensation der Drehimpulse aufgehoben. Die resultierenden Kreisströme wirken gemäß der Lenzschen Regel

der äußeren Ursache entgegen. Das äußere Feld wird damit allerdings nur geringfügig geschwächt:

$$\chi < 0 \rightarrow 1 - 10^{-4} < \mu_r < 1 - 10^{-9}, (\mu_r \approx 1).$$

Der Diamagnetismus ist temperaturunabhängig. Typische Vertreter diamagnetischer Stoffe sind Cu, Au, Ag, H₂O, etc.

1.7.3 Paramagnetismus

Die atomaren Drehimpulse kompensieren sich nicht. Die Atome bilden dadurch Elementarmagnete, die statistisch orientiert sind. Bei äußerer Erregung orientieren sich die Elementarmagnete in Feldrichtung. Das äußere Feld wird allerdings nur geringfügig verstärkt:

$$\chi > 0 \rightarrow 1 + 10^{-6} < \mu_r < 1 + 10^{-4}, (\mu_r \approx 1).$$

Die Orientierung der Elementarmagnete wird durch thermische Bewegung der Atome gestört. Der Paramagnetismus ist daher temperaturabhängig. Typische Vertreter paramagnetischer Stoffe sind O₂, Al, Mg, Ti, Pt, etc.

1.7.4 Ferromagnetismus

Eisen (Fe), Kobalt (Co) und Nickel (Ni) sowie deren Legierungen sind ferromagnetische Materialien. Beim Ferromagnetismus handelt es sich um einen starken Paramagnetismus. In kleinen Bereichen, die als **Weiß'sche Bezirke** (vgl. Abbildung 1.26) bezeichnet werden, tritt eine spontane Ausrichtung der Elementarmagnete auf. Ohne äußeres Magnetfeld ergibt sich eine statistische Orientierung der Weiß'schen Bezirke. Unter Einwirkung eines äußeren Magnetfelds richten sich die Weiß'schen Bezirke in Richtung des äußeren Magnetfelds aus und die Weiß'schen Bezirke, die in Richtung des äußeren Feldes orientiert sind, vergrößern sich. Die Magnetisierung des Materials wird verstärkt.

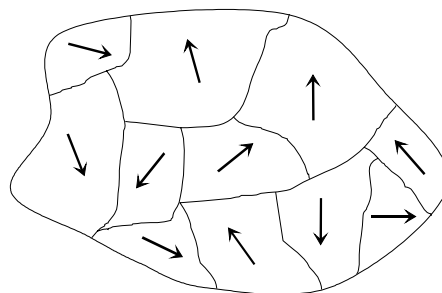


Abbildung 1.26: Weiß'sche Bezirke

Die Magnetisierung kann nur zunehmen, bis alle Weiß'schen Bezirke ausgerichtet sind. Dadurch tritt eine Sättigung der Magnetisierung ein. Wird das äußere Feld abgeschaltet, bleibt die Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke teilweise erhalten, d.h., die Magnetisierung ist zum Teil irreversibel. Es verbleibt eine Restinduktion, die als **Remanenzinduktion** bezeichnet wird. Permanentmagnete bestehen aus Materialien mit ausgeprägter Remanenzinduktion. Der Ferromagnetismus ist wie der Paramagnetismus temperaturabhängig. Oberhalb der **Curie-Temperatur** verschwinden die spontane Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke. Das Material

ist bei höheren Temperaturen paramagnetisch. Für Eisen beträgt die Curie-Temperatur $769\text{ }^{\circ}\text{C}$. Es resultiert ein typischer, nichtlinearer Zusammenhang $H = f(B)$, der als Hysteresekurve (s. Abbildung 1.27) bezeichnet wird. Geht man zunächst vom unmagnetisierten Material aus und erhöht die magnetische Feldstärke, wird die **Neukurve** durchlaufen. Die Induktion steigt zunächst stark an, weil die Weiß'schen Bezirke sich in Richtung des Feldes orientieren und ausdehnen. Sind die Weiß'schen Bezirke weitgehend ausgerichtet, wird der Anstieg verringert. Das Material wird zunehmend magnetisch gesättigt. Sind alle Weiß'schen Bezirke ausgerichtet, bleibt die Magnetisierung nach (1.51) konstant und der weitere Anstieg der Induktion entspricht demjenigen im freien Raum ($\frac{dB}{dH} = \mu_0$).

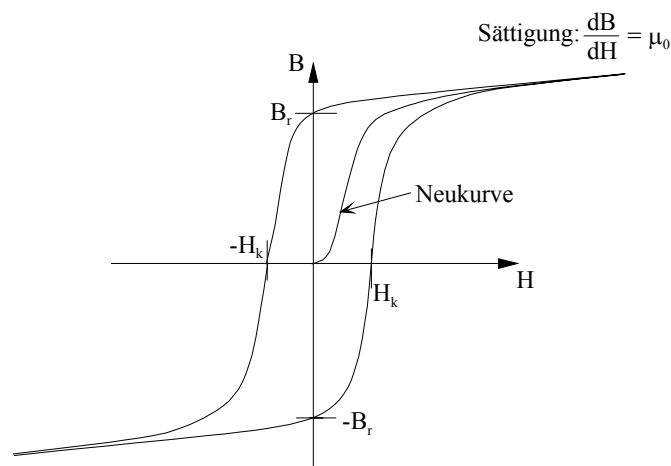


Abbildung 1.27: Hysteresekurve

Wird die magnetische Feldstärke, ausgehend aus der Sättigung, reduziert, verbleibt für $H = 0$ eine Restmagnetisierung (**Remanenzinduktion** B_r). Um diese zu beseitigen, muß eine magnetische Feldstärke in negativer Richtung angelegt werden. Bei der **Koerzitivfeldstärke** H_k verschwindet die Magnetisierung. Mit weiter ansteigender Feldstärke wird das Material in der entgegengesetzten Richtung bis zur Sättigung magnetisiert.

Die ferromagnetischen Materialien werden qualitativ entsprechend ihrer Koerzitivfeldstärke klassifiziert. **Weichmagnetische** Materialien wie Weicheisen und Schmiedeeisen besitzen eine schmale Hysteresekurve mit geringer Koerzitivfeldstärke ($H_k < 100 \frac{\text{A}}{\text{m}}$). Sie werden beispielsweise in der Wechselstromtechnik als Material für Transformatorkerne verwendet. **Hartmagnetische** Materialien, wie einige spezielle Stahlsorten, besitzen eine breite Hysteresekurve mit hoher Koerzitivfeldstärke ($H_k = 0,5 \dots 800 \text{ kAm}^{-1}$). Sie werden z.B. als Dauermagnetwerkstoffe verwendet und besitzen zudem eine hohe Remanenzinduktion bis zu 1T.

Ferromagnetische Stoffe verhalten sich stark nichtlinear. Die Angabe einer Permeabilitätszahl ist allenfalls für weichmagnetische Stoffe außerhalb der Sättigung sinnvoll. In der Regel bestimmt man die Permeabilitätszahl aus der Steigung der Neukurve außerhalb Sättigung. Ein typischer Wert hierfür ist $\mu_r \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} = 5000$.

Im folgenden sind einige wichtige Eigenschaften von Ferromagnetika stichwortartig zusammengefaßt:

- Ferromagnetische Stoffe verstärken das Magnetfeld gravierend,

- Induktion ist abhängig von magnetischer Feldstärke und Vorgeschichte (Hysterese),
- Sättigung bei hohen Feldstärken,
- hohe Permeabilität μ_r bis 10000,
- Beibehalten einmal erzeugter Magnetisierung (Remanenz),
- ausgeprägte Anisotropie, Vorzugsrichtung der Magnetisierung,
- bei Magnetisierung entstehen mechanische Spannungen: Magnetostriktion,
- oberhalb der Curie-Temperatur (Eisen $769\text{ }^{\circ}\text{C}$) verschwindet die Magnetisierung,
- Entmagnetisierung durch mechanische Einwirkung (Hammerschläge).

1.8 Magnetisches Feld an Grenzflächen

In der Elektrotechnik spielt der Übergang zwischen hochpermeablen Stoffen (Ferromagnetika) und Luft eine wesentliche Rolle. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist der Luftspalt zwischen Stator und Rotor einer elektrischen Maschine.

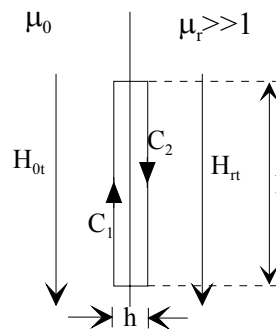


Abbildung 1.28: Verhalten der Tangentialkomponente der Feldstärke an der Grenzfläche zu einem hochpermeablen Material

In Abbildung 1.28 ist eine Grenzfläche zwischen Luft (links) und einem hochpermeablen Material (rechts) dargestellt. Auf den skizzierten Umlauf soll für $h \rightarrow 0$ das Durchflutungsgesetz angewendet werden. Da auf der Grenzfläche kein Strom fließt, gilt für die Durchflutung $\Theta = 0$ und es folgt:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = 0. \quad (1.55)$$

Wegen des Grenzübergangs wirken sich lediglich die Wegelemente c_1 und c_2 parallel zur Grenzfläche aus. Werden mit H_{0t} und H_{rt} die Komponenten der Feldstärke parallel zur Grenzfläche bezeichnet, ergibt sich aus (1.55)

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = -H_{0t} \cdot l + H_{rt} \cdot l = 0, \quad (1.56)$$

$$H_{0t} = H_{rt}. \quad (1.57)$$

Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke sind demnach an der Grenzfläche stetig. Wegen $\mu_r \gg 1$ bedeutet dies, daß die Tangentialkomponente der Induktion im hochpermeablen Material erheblich größer als in Luft ist:

$$B_{rt} \gg B_{0t}, \quad (1.58)$$

Der Induktionsfluß wird sich im wesentlichen im hochpermeablen Material ausbreiten. Hochpermeables Material „führt“ den Induktionsfluß. Dies wird z.B. in Transformatorkernen genutzt, um zu gewährleisten, daß der magnetische Fluß möglichst vollständig mit beiden Transformatorspulen verkettet ist.

In Abbildung 1.29 ist ein quaderförmiges Volumen dargestellt, das einen Teil der Grenzfläche einschließt. Die Flächen ΔA_1 und ΔA_2 sind parallel zur Grenzfläche gerichtet, und es wird der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ betrachtet. Aus dem Satz vom Hüllenfluß folgt für die Normalkomponenten der Induktion

$$-B_{0n} \cdot \Delta A_1 + B_{rn} \cdot \Delta A_2 = 0 \quad (1.59)$$

und mit $\Delta A_1 = \Delta A_2 = \Delta A$:

$$B_{0n} = B_{rn}. \quad (1.60)$$

Die Normalkomponenten der magnetischen Induktion sind demnach an der Grenzfläche stetig. Wegen $\mu_r \gg 1$ bedeutet dies, daß die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke in Luft erheblich größer als im hochpermeablen Material ist:

$$H_{0n} \gg H_{rn}. \quad (1.61)$$

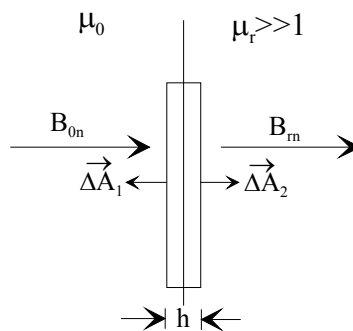


Abbildung 1.29: Verhalten der Normalkomponente der Induktion an der Grenzfläche zu einem hochpermeablen Material

Zusammenfassend ergibt sich, daß der Induktionsfluß in Anwesenheit von hochpermeablem Material nahezu vollständig in diesem verläuft ($B_{rt} \gg B_{0t}$). Hochpermeables Material „sammelt“ und „führt“ den Induktionsfluß. Die Induktionslinien treten nahezu senkrecht zur Oberfläche aus dem hochpermeablen Material aus, da in Luft die Normalkomponente von \vec{H} erheblich größer und die Tangentialkomponente erheblich geringer als im Material ist.

Beim Transformatorkern wird dies genutzt um möglichst den gesamten von der Primärspule erzeugten Fluß an der Sekundärspule zur Verfügung zu haben (s. Abbildung 1.30). Der Fluß Φ wird im wesentlichen vom Kern geführt. Lediglich ein geringer Streufluß Φ_{Streu} ist mit einer der Spulen verkettet.

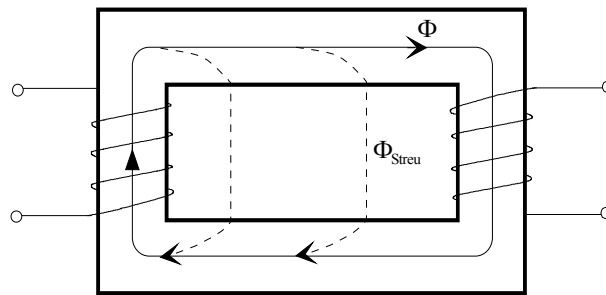


Abbildung 1.30: Transformator-kern

Abbildung 1.31 zeigt die Wirkung eines Luftspalts in einem Magnetkreis. Nahezu der gesamte Fluß steht im Luftspalt zur Verfügung. Die Induktion im Luftspalt ist näherungsweise gleich der Induktion im hochpermeablen Material und kann z.B. zur Kraftwirkung auf Leiter (Elektromotor, Drehspulinstrument) genutzt werden.

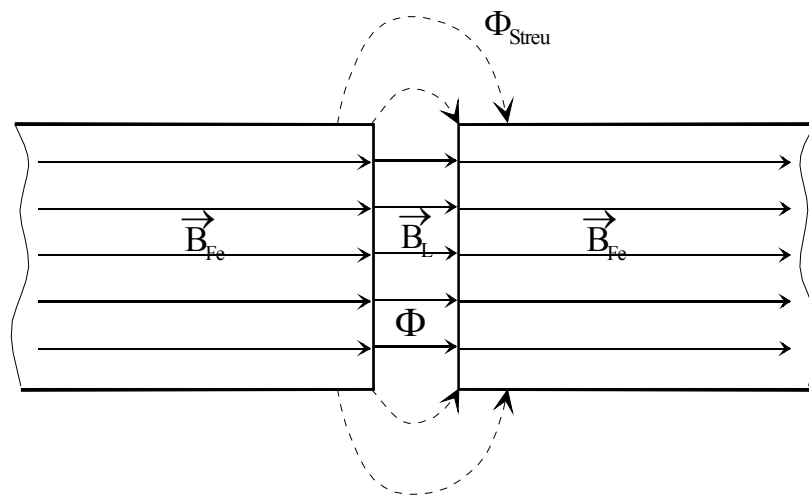


Abbildung 1.31: Luftspalt

Abbildung 1.32 zeigt die Abschirmung z.B. eines hochempfindlichen Meßgeräts mittels hochpermeablem Material (z.B. Mu-Metall). Die Induktionslinien werden nahezu vollständig um den Innenraum der Abschirmung herumgeführt.

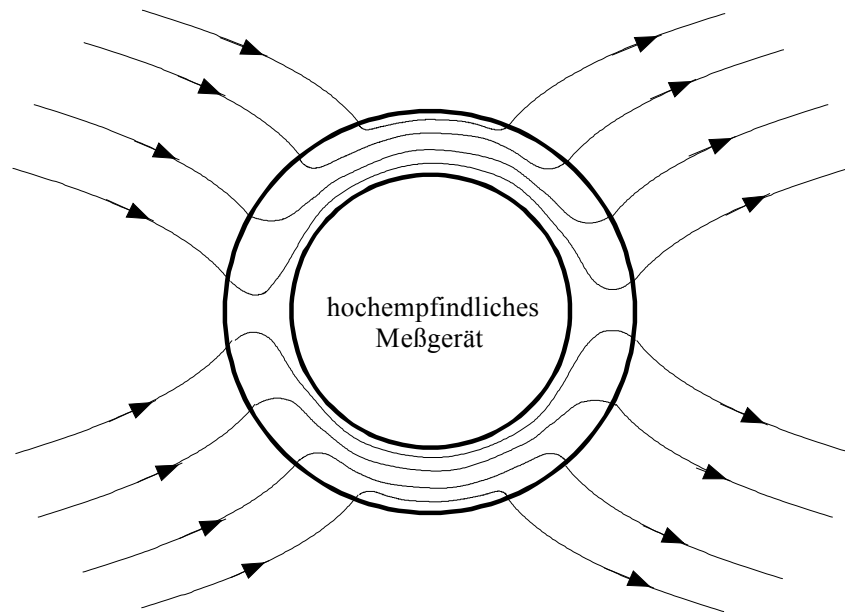


Abbildung 1.32: Magnetische Abschirmung

1.9 Der magnetische Kreis

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß der magnetische Fluß vorwiegend in hochpermeablem Material geführt wird. Der Streufluß ist in der Regel gegenüber dem Nutzfluß vernachlässigbar. Dies wird in sog. magnetischen Kreisen zur Erzeugung und „Leitung“ hoher magnetischer Flüsse (Transformatoren, elektrische Maschinen) genutzt. Im folgenden wird ein einfaches elektrisches Ersatzschaltbild für magnetische Kreise hergeleitet, das eine Berechnung mit den Methoden der Berechnung elektrischer Netzwerke ermöglicht.

Voraussetzungen:

- Magnetische Kreise bestehen aus hochpermeablem Material ($\mu_r \gg 1$). Der Fluß wird daher im wesentlichen im Magnetmaterial geführt, und der Streufluß durch die Luft ist vernachlässigbar,
- Die magnetischen Kreise sind aus Schenkeln mit konstantem Querschnitt zusammengesetzt. Eine homogene Feldverteilung in den Schenkeln wird vorausgesetzt. Die Inhomogenitäten an den Anschlußstellen werden vernachlässigt,
- Sättigungseffekte werden nicht berücksichtigt.

Verzweigungsstellen magnetischer Kreise (Knoten)

Abbildung 1.33 zeigt eine Verzweigungsstelle in einem magnetischen Kreis. Hier stoßen Schenkel mit u.U. unterschiedlichen Querschnitten A_i zusammen. Unter Vernachlässigung der Streuflüsse ergibt sich aus dem Hüllenintegral der Induktion:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_2 + B_3 \cdot A_3 + B_4 \cdot A_4 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 0. \quad (1.62)$$

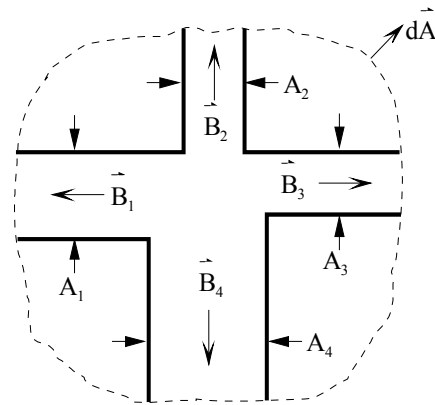


Abbildung 1.33: Verzweigungsstelle magnetischer Kreise

(1.62) entspricht der Kirchhoffschen Knotenregel elektrischer Netzwerke.

Magnetischer Fluß in einem Schenkel

Für einen Schenkel mit homogener Querschnittsfläche A_i , der Permeabilität μ_i und der Länge l_i ergibt sich für den Fluß:

$$\phi_i = B_i \cdot A_i = \mu_i \cdot H_i \cdot A_i = \mu_i \frac{A_i}{l_i} \cdot H_i \cdot l_i = \frac{H_i \cdot l_i}{R_{mi}} \quad (1.63)$$

mit

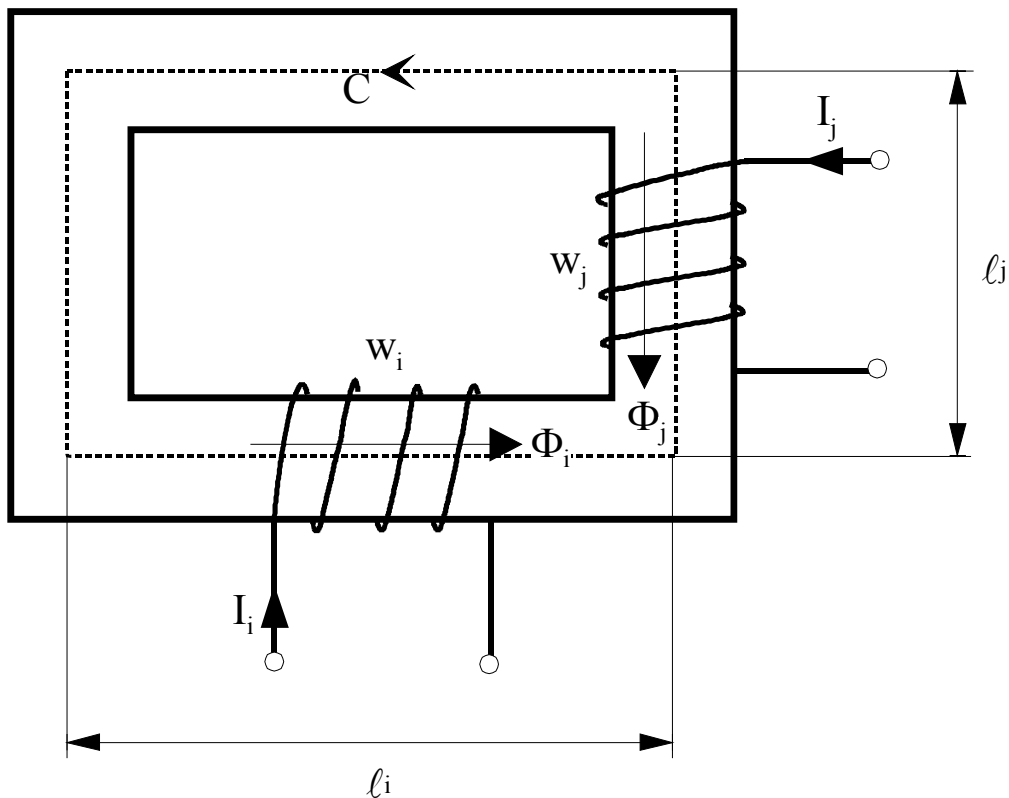
$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i \cdot A_i} \quad (1.64)$$

R_{mi} wird als **magnetischer Widerstand** oder **Reluktanz** bezeichnet. Definiert man zusätzlich die **magnetische Spannung**

$$U'_{mi} = H_i \cdot l_i \quad (1.65)$$

ergibt sich aus (1.63) eine Beziehung analog zum ohmschen Gesetz:

$$\phi_i = \frac{U'_{mi}}{R_{mi}}, \text{ bzw. } U'_{mi} = \phi_i \cdot R_{mi} \quad (1.66)$$


Abbildung 1.34: Masche eines magnetischen Kreises

In Abbildung 1.34 ist beispielhaft eine Masche eines magnetischen Kreises dargestellt. Die Zählpfeile für die magnetischen Flüsse in den einzelnen Schenkeln werden willkürlich gewählt. Für den skizzierten Umlauf c soll nun das Durchflutungsgesetz angeschrieben werden:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i (\pm H_i \cdot l_i) = \sum_i (\pm U'_{mi}) = \Theta, \quad (1.67)$$

Die Summanden sind positiv, wenn der Zählpfeil von Φ_i mit dem Umlaufsinn von c übereinstimmt.

Die Wicklungen auf den einzelnen Schenkeln ergeben Teildurchflutungen, die den Schenkel zugeordnet werden können. Eine Teildurchflutung wird positiv gezählt, wenn der Wicklungsstrom und der Zählpfeil des Flusses ein rechtsschraubiges System bilden. Im abgebildeten Beispiel ergeben sich demnach:

$$\Theta_i = -w_i \cdot I_i, \quad \Theta_j = w_j \cdot I_j$$

Für die Gesamtdurchflutung der Masche folgt dann:

$$\Theta = \sum_i (\pm \Theta_i). \quad (1.68)$$

Die Summanden werden positiv gezählt, wenn der Zählpfeil von Φ_i mit der Umlaufrichtung c übereinstimmt.

Aus (1.67) folgt nun die Maschengleichung zu:

$$\sum_i (\pm U'_{mi}) = \sum_i (\pm \Theta_i) \quad \text{oder} \quad (1.69)$$

$$\sum_i \pm (U'_{mi} - \Theta_i) = \sum_i \pm U_{mi} = 0. \quad (1.70)$$

Betrachtet man jetzt den Ausdruck in der Klammer in (1.70) als verallgemeinerte Zweigbeziehung, so folgt mit (1.66):

$$U_{mi} = U'_{mi} - \Theta_i = \phi_i \cdot R_{mi} - \Theta_i . \quad (1.71)$$

Dies entspricht der verallgemeinerten Zweigbeziehung eines elektrischen Netzwerks und kann durch die Ersatzschaltung in Abbildung 1.35 repräsentiert werden.

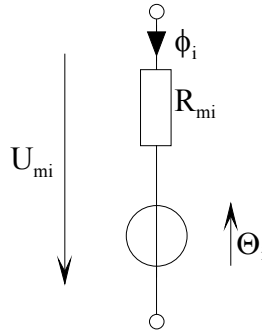


Abbildung 1.35: Elektrische Ersatzschaltung eines Schenkels mit Durchflutung

Äquivalent zu den elektrischen Netzwerken ergeben sich:

- k-1 linear unabhängige KH-Knotengleichungen: $\sum_i \pm \phi_i = 0$ (1.72)

- m linear unabhängige KH Maschengleichungen: $\sum_i \pm U_{mi} = 0$ (1.73)

- z verallgemeinerte Zweiggleichung: $U_{mi} = \phi_i \cdot R_{mi} - \Theta_i$ (1.74)

Zur Berechnung magnetischer Kreise können demnach sämtliche Verfahren der elektrischen Netzwerkberechnung eingesetzt werden.

Berücksichtigung von Luftspalten

Luftspalte in magnetischen Kreisen haben folgende Bedeutungen:

- Sie dienen der Linearisierung nichtlinearer Magnetisierungskennlinien,
- Sie ermöglichen eine mechanische Bewegung eines Rotors relativ zum Stator,
- Sie ermöglichen die Kraftwirkung z.B. auf den Anker eines Relais.

Um den Streufluß zu minimieren, wird die Luftspaltlänge hinreichend klein gehalten. Abbildung 1.36 zeigt den Feldlinienverlauf in einem Luftspalt. Wegen der geringen Permeabilität ist der magnetische Widerstand des Luftspalts, verglichen mit dem magnetischen Widerstand der Schenkel, sehr hoch. Der Fluß verbreitert seinen Querschnitt, um den magnetischen Widerstand zu minimieren. Durch den Streufluß wird das Feld im Luftspalt inhomogen. In erster Näherung wird jedoch von einem homogenen Feld ausgegangen, so daß entsprechend (1.64) der magnetische Widerstand des Luftspalts angegeben werden kann:

$$R_{ml} = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A_l} . \quad (1.75)$$

Die Luftspaltaufweitung (Streuung) kann durch einen Luftspaltquerschnitt größer als der Schenkelquerschnitt näherungsweise berücksichtigt werden:

$$A_l > A_{Fe} . \quad (1.76)$$

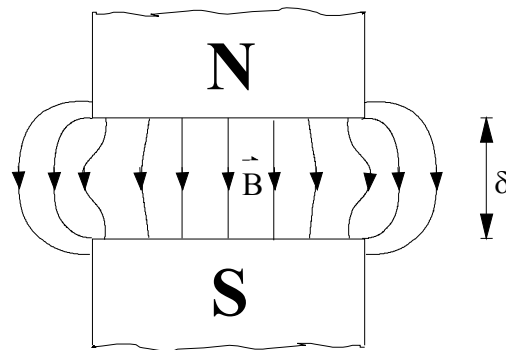


Abbildung 1.36: Luftspalt im Magnetkreis

Mit Hilfe der elektrischen Ersatzschaltung lassen sich folgende Probleme einfach lösen:

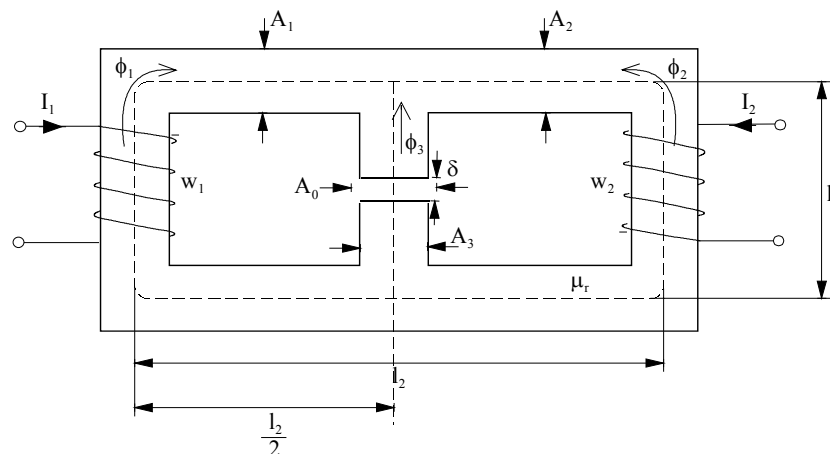
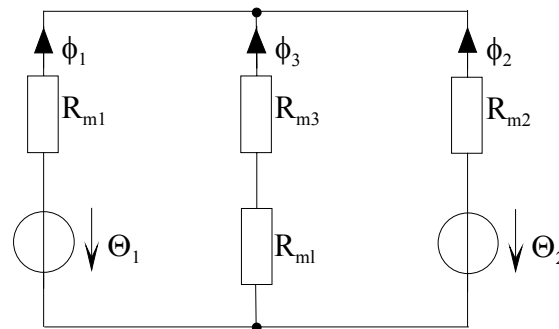
1. Ohne Berücksichtigung der Sättigung

- Die Durchflutungen Θ_i der Spulen werden vorgegeben. Die Flüsse ϕ_i können mit Netzwerkmethoden berechnet werden.
- Die benötigten Flüsse werden vorgegeben. Daraus werden die erforderlichen Durchflutungen Θ_i berechnet.

2. Mit Berücksichtigung der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie

- Die benötigten Flüsse in den Schenkeln werden vorgegeben.
- Daraus wird die Induktion in den Schenkeln berechnet: $B_i = \frac{\phi_i}{A_i}$.
- Aus der Magnetisierungskennlinie wird die Feldstärke berechnet: $H_i = f(B_i)$.
- Daraus wird der Durchflutungsbedarf der Schenkel bestimmt: $\Theta_i = H_i \cdot l_i$.
- Berechnen der Gesamtdurchflutung der Spulen.

Eventuell ist ein mehrfacher, iterativer Durchgang der Schritte erforderlich.

Beispiel:

Abbildung 1.37: Beispiel zur Berechnung magnetischer Kreise

Abbildung 1.38: Elektrisches Ersatzschaltbild zum Beispiel

$$\Theta_1 = w_1 \cdot I_1, \quad \Theta_2 = w_2 \cdot I_2,$$

$$R_{m1} = \frac{l_1 + 2 \cdot \frac{l_2}{2}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A_1}, \quad R_{m2} = R_{m1}, \quad R_{m3} = \frac{l_1 - \delta}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A_3}, \quad R_{ml} = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A_0}.$$

Mit $A_0 > A_2$ kann die Luftspaltstreueung berücksichtigt werden. Mittels Knotenanalyse des in Abbildung 1.38 dargestellten Ersatzschaltbilds werden die Flüsse ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 bestimmt. Daraus ergibt sich die Induktion in den Schenkeln.

2 Zeitlich veränderliche Felder

2.1 Der Induktionsvorgang an beweglichen Leitern

Gemäß Abbildung 2.1 wird ein Leiterstück der Länge l mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht zu einem homogenen Induktionsfeld bewegt. Diese Bewegung bewirkt eine Lorentzkraft $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$, die zu einer Ladungsträgerverschiebung im Leiter führt. Im Beispiel sammeln sich am oberen Ende des Leiterstücks positive Ladungsträger an. Daraus resultiert ein elektrisches Feld \vec{E} , das der Lorentzkraft entgegenwirkt. Im Gleichgewicht gilt:

$$q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \vec{E} \quad (2.1)$$

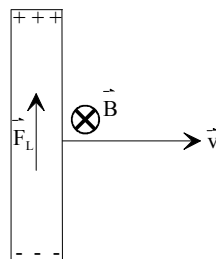


Abbildung 2.1: Bewegter Leiter im homogenen Magnetfeld

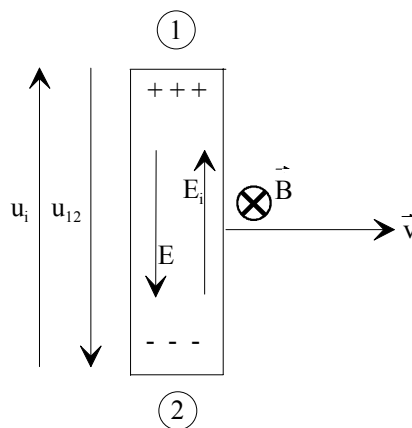


Abbildung 2.2: Induzierte und elektrische Feldstärke

Eine geeignete Modellvorstellung ergibt sich nun aus der Annahme, daß statt der Lorentzkraft eine **induzierte Feldstärke** E_i

$$\vec{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

wirkt, deren Ursache keine elektrische Ladung, sondern die Bewegung des Leiters im Magnetfeld ist. Diese bewirkt die Ladungstrennung längs der Leiterachse bis das Gleichgewicht mit der elektrischen Feldstärke E erreicht ist. Die elektrische Feldstärke erzeugt eine Spannung zwischen den Leiterenden. Im Beispiel ergibt sich eine positive Spannung vom Leiterende 1 zum Leiterende 2:

$$u_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot l. \quad (2.3)$$

Ebenso kann induzierte Spannung u_i definiert werden

$$u_i = \int_2^1 \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = E_i \cdot l, \quad (2.4)$$

die als Ursache für die Ladungsträgerverschiebung aufgefaßt wird (historisch als **Elektromotorische Kraft, EMK** bezeichnet).

Die Spannung u_{12} kann abgegriffen werden, wenn der Leiter, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, auf leitfähigen Schienen läuft. Dabei kann der Leiter einschließlich der Schienen mit Leiter- und Schienenwiderstand als Spannungsquelle mit Innenwiderstand aufgefaßt werden. Die Leerlaufspannung an den Klemmen ergibt sich zu

$$u = u_i = \int_2^1 \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = E_i \cdot l = v \cdot B \cdot l, \quad (2.5)$$

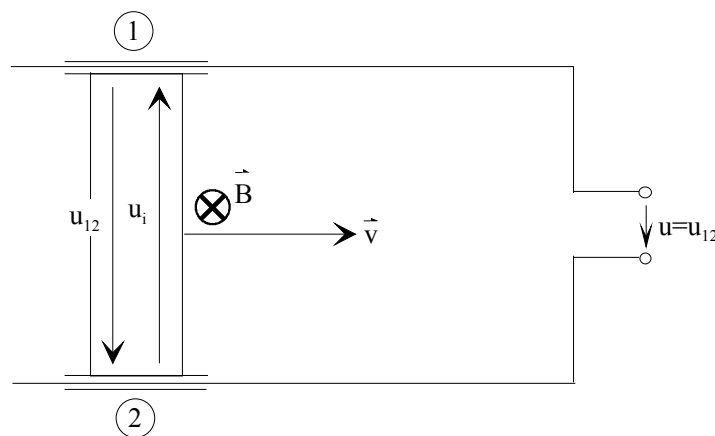


Abbildung 2.3: Abgriff der durch Induktion erzeugten „elektrischen“ Spannung

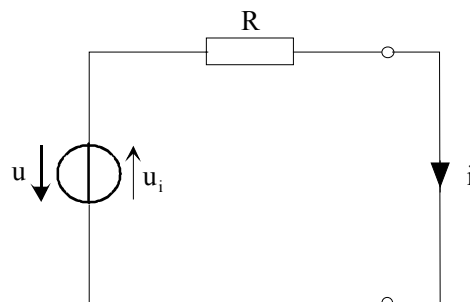


Abbildung 2.4: Elektrisches Ersatzschaltbild

Abbildung 2.4 zeigt das Ersatzschaltbild der Anordnung für den Fall, daß die Klemmen kurzgeschlossen werden. In diesem Fall fließt der Strom

$$i = \frac{u}{R} = \frac{|u_i|}{R}. \quad (2.6)$$

u ist die Leerlaufspannung der Anordnung. Die induzierte Spannung u_i ist die Ursache dafür, daß Ladungsträger die Potentialschwelle der Quelle überwinden (EMK). Die induzierte Spannung wird durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld verursacht. Das Beispiel zeigt einen speziellen Fall des von Faraday allgemein formulierten **Induktionsgesetzes**.

2.2 Das Induktionsgesetz

Faraday hat 1831 festgestellt, daß in einer geschlossenen Leiterschleife ein Strom fließt, wenn sich der von der Leiterschleife umfaßte magnetische Fluß ändert. Der Effekt wird als **Elektromagnetische Induktion** oder einfacher als **Induktion** bezeichnet. Faraday hat das Induktionsgesetz wie folgt formuliert:

$$i \cdot \overset{\circ}{R} = - \frac{d\overset{\circ}{\Psi}}{dt}. \quad (2.7)$$

Mit $\overset{\circ}{R}$ ist der Ohmsche Widerstand der Schleife bezeichnet. $\overset{\circ}{\Psi}$ ist der von der Schleife umfaßte Fluß, der als **Flußverketzung** der Schleife bezeichnet wird. i ist der in der Schleife aufgrund der zeitlichen Änderung der Flußverketzung **induzierte** Strom.

Bei einer Leiterschleife, bestehend aus einem Leiter mit endlichem Querschnitt, ist der von den einzelnen Stromlinien umfaßte Fluß unterschiedlich, wie dies in Abbildung 2.5 dargestellt ist. Hier ergibt sich die Flußverketzung aus einer geeigneten Mittelung des Flusses über alle Stromröhren. Darauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden. Bei Leitern mit hinreichend kleinem Querschnitt gilt in guter Näherung $\overset{\circ}{\Psi} \approx \phi$.

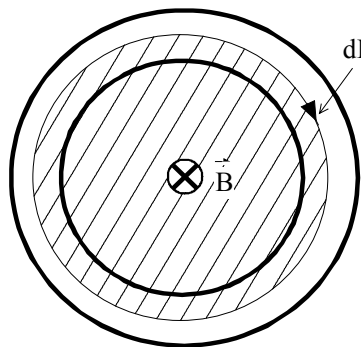


Abbildung 2.5: Zur Flußverketzung einer Leiterschleife mit einem Leiter endlichen Querschnitts

Der Strom in der Leiterschleife wird auf die Schleifenspannung $\overset{\circ}{u}$ bzw. auf die induzierte Spannung u_i zurückgeführt:

$$i \cdot \overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{u} = u_i = - \frac{d\overset{\circ}{\Psi}}{dt}. \quad (2.8)$$

Daraus folgt, daß die in der Leiterschleife induzierte Spannung gleich der negativen Ableitung der Flußverketzung nach der Zeit ist, die auch als **magnetischer Schwund** bezeichnet wird.

Für das induzierte Feld gilt:

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = u_i \neq 0. \quad (2.9)$$

Das induzierte Feld ist ein sog. **Wirbelfeld**. Wegen (2.9) existiert kein eindeutiges Potential und damit auch keine eindeutige Spannung zwischen zwei Punkten im Raum. Insbesondere gilt die Kirchhoffsche Maschenregel hierdurch nicht mehr.

Für linienförmige Leiter oder für Stromröhren in räumlich ausgedehnten Leiterschleifen gilt wegen $\psi = \phi$:

$$u_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Psi}{dt} \approx -\frac{d\phi}{dt}. \quad (2.10)$$

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.11)$$

folgt damit die allgemeine Form des Induktionsgesetzes:

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (2.12)$$

Dabei ist A die in die Leiterschleife c eingespannte Fläche

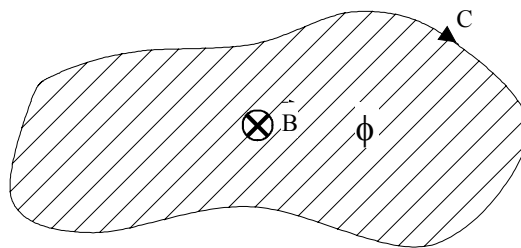


Abbildung 2.6: Linienförmige Leiterschleife

Maxwell hat gezeigt, daß das Induktionsgesetz unabhängig davon gilt, ob der Weg c in einem Leiter oder in einem Nichtleiter geführt wird. Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ist stets mit einer induzierten Feldstärke verkettet. Dies ist eine der wesentlichen Voraussetzungen für die Existenz elektromagnetischer Wellen. Die induzierte Spannung ist allerdings nur mit Hilfe einer materiellen Leiterschleife meßbar.

Das Induktionsgesetz (2.12) sagt nichts über die lokale Verteilung von \vec{E}_i aus. Lediglich das Umlaufintegral wird festgelegt. $u_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$ ist ein Maß für die Arbeit, die bei der Bewegung einer Probeladung q auf dem Umlauf c geleistet oder gewonnen wird:

$$\dot{W}_q = q \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = q \cdot u_i. \quad (2.13)$$

Entsprechend gilt im elektrostatischen Feld für aufgewendete oder gewonnene Arbeit beim Transport einer Ladung von Punkt 1 nach Punkt 2:

$$W_{q_{12}} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \cdot U_{12}. \quad (2.14)$$

Hier gilt allerdings, daß die auf einem geschlossenen Umlauf geleistete Arbeit verschwindet:

$$\dot{W}_q = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (2.15)$$

Die Ursache für die Induktion einer Spannung in einer Leiterschleife ist die zeitliche Änderung der Flußverkettung. Diese kann wie folgt klassifiziert werden:

1. Ruheinduktion: Die Leiterschleife ruht. Die Induktion ist zeitabhängig: $B = f(t)$.
2. Bewegungsinduktion: Die Induktion ist konstant und homogen. Die Leiterschleife ändert ihre Fläche so, daß sich der mit ihr verkettete Fluß ändert: $A = f(t)$.
3. Bewegungsinduktion: Die Induktion ist zeitlich konstant aber inhomogen. Die starre Leiterschleife bewegt sich so, daß sich der verkettete Fluß ändert: $s = f(t)$ bzw. $\alpha = f(t)$.
4. Beliebige Überlagerungen von 1...3.

2.2.1 Beispiele zur Induktion in Leiterschleifen

Beispiel 1: Geschlossene Leiterschleife mit Fläche A , Leiterquerschnitt A_L hinreichend klein, so daß gilt: $\psi \approx \phi$, Leitfähigkeit κ , Leiterschleife liegt gemäß Skizze im homogenen, zeitabhängigen Induktionsfeld $\vec{B}(t)$, Induktion und Flächenvektor \vec{A} sind parallel gerichtet. Gesucht ist der induzierte Strom.

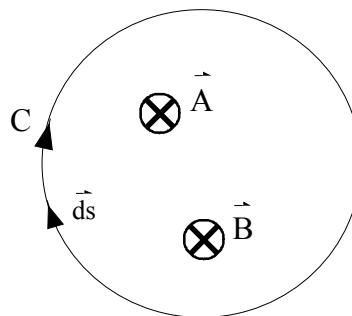


Abbildung 2.7: Skizze zu Beispiel 1

$$u_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Psi}{dt} \approx -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -A \cdot \frac{dB}{dt} \quad (2.16)$$

E_i bewirkt Stromfluß:

$$\vec{J}_i = \kappa \cdot \vec{E}_i, I_i = \int_{A_L} \vec{J}_i \cdot d\vec{A}_L = J_i \cdot A_L, \text{ für } \vec{E}_i \parallel \vec{A}_L \parallel d\vec{s}. \quad (2.17)$$

Mit (2.16) folgt:

$$u_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \frac{J_i}{\kappa} \cdot \oint_C ds = I_i \cdot \frac{l}{\kappa \cdot A_L} = I_i \cdot R_L. \quad (2.18)$$

Dies entspricht der Beziehung von Faraday (2.7):

$$I_i = \frac{U_i}{R_L} = -\frac{1}{R_L} \cdot \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.19)$$

Beispiel 2: Entsprechende Anordnung wie Beispiel 1, jedoch mit geöffneter Leiterschleife (s. Skizze in Abbildung 2.8). Außerhalb der kreisrunden Schleife existiere kein Feld.

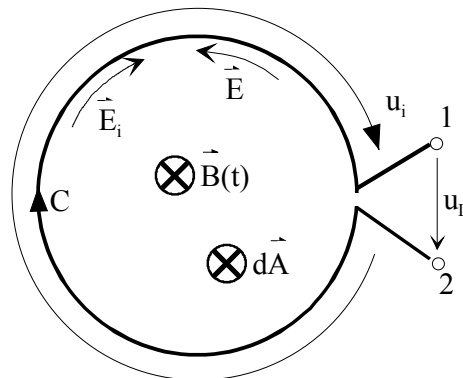


Abbildung 2.8: Skizze zu Beispiel 2

Im Leiter: Aufbau eines elektrischen Feldes bis zum Gleichgewicht $\vec{E} + \vec{E}_i = 0$.

Klemmenspannung:

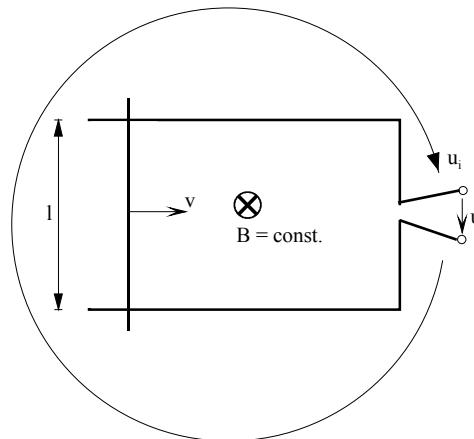
$$u_L = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = u_i = -\frac{d}{dt} \cdot \int \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (2.20)$$

Das resultierende elektrische Feld ist wirbelfrei:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} + u_L = 0. \quad (2.21)$$

$$u_L = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = u_i = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (2.22)$$

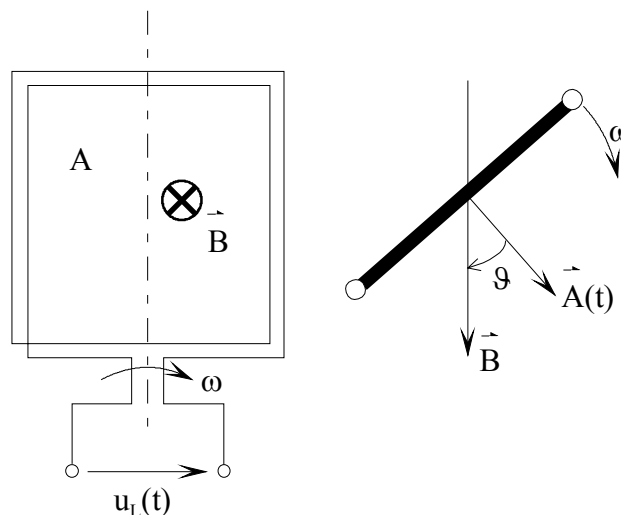
Überlegung zum Vorzeichen: Unter der Annahme $\frac{dB}{dt} < 0$ nimmt der Fluß ab ($\frac{d\phi}{dt} < 0$). Damit ist \vec{E}_i positiv, und positive Ladungsträger werden zur Klemme 1 transportiert. Daraus folgt: $u_L > 0$.

Beispiel 3: Bewegter Leiter auf leitenden Schienen

Abbildung 2.9: Skizze zu Beispiel 3

$$u_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B \cdot A(t)] = -\frac{d}{dt} \cdot B \cdot [A(0) - v \cdot l \cdot t] = B \cdot v \cdot l = u. \quad (2.23)$$

Es folgt also das (2.5) entsprechende Ergebnis:

Beispiel 4: Prinzip Wechselstromgenerator, mit Winkelgeschwindigkeit ω drehende Rechteckspule mit n Windungen im homogenen Magnetfeld


Abbildung 2.10: Skizze zu Beispiel 4

Der Fluß durch die Spule ist abhängig vom Drehwinkel ϑ :

$$\phi = B \cdot A \cdot \cos \vartheta, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \omega \cdot t. \quad (2.24)$$

Jede Windung der Spule ist mit dem Fluß verkettet, so daß sich für die Flußverknüpfung der Spule ergibt:

$$\Psi = n \cdot \phi = n \cdot B \cdot A \cdot \cos(\vartheta_0 + \omega \cdot t). \quad (2.25)$$

Daraus folgt für die induzierte und für die Klemmenspannung:

$$u_i = u_L(t) = -\frac{d\Psi}{dt} = n \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\vartheta_0 + \omega \cdot t) = \hat{u}_L \cdot \sin(\vartheta_0 + \omega \cdot t), \quad (2.26)$$

$$\text{mit } \hat{u}_L = n \cdot B \cdot A \cdot \omega$$

Für die Parameter $n = 1000$, $B = 1\text{T}$, $A = 10\text{ cm}^2$, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50\text{Hz}$ ergibt sich die Klemmenspannung mit $\hat{u}_L = 314\text{V}$

Beispiel 5: Transformatorprinzip, Magnetkreis mit zeitabhängigem Fluß $\phi(t) = \hat{\Phi} \cdot \cos \omega \cdot t$ (erzeugt durch eine Primärwicklung)

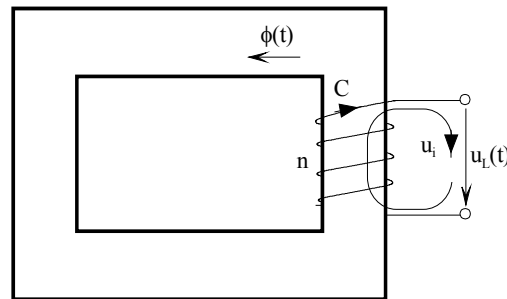


Abbildung 2.11: Skizze zu Beispiel 5

Wicklung ist n mal mit $\phi(t)$ verkettet: $\Psi(t) = n \cdot \phi(t)$

$$u_i(t) = u_L(t) = -\frac{d}{dt} \cdot n \cdot \hat{B} \cdot A \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (2.27)$$

$$u_L(t) = n \cdot \hat{B} \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t = \hat{u} \cdot \sin \omega \cdot t, \text{ mit } \hat{u} = n \cdot \hat{B} \cdot A \cdot \omega \quad (2.28)$$

Für die Parameter $n = 1000$, $B = 0,5\text{T}$, $A = 4\text{ cm}^2$, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50\text{Hz}$ ergibt sich die Klemmenspannung: $\hat{u} = 62,83$

Beispiel 6: Barlowsches Rad

Metallisches Rad mit Radius R dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Die Achse ist parallel zum homogenen Induktionsfeld \vec{B} gerichtet. Die Spannung wird über Schleifringe von Achse und Peripherie abgegriffen (vgl. Abbildung 2.12).

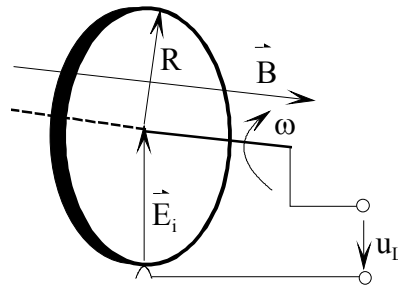


Abbildung 2.12: Skizze zu Beispiel 6

\vec{E}_i ist radial nach innen gerichtet.

$$u_L = \int_R^0 \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_0^R \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (2.29)$$

$$v(r) = \omega \cdot r, E_i(r) = B \cdot \omega \cdot r \quad (2.30)$$

$$u_L = \int_R^0 B \cdot \omega \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \omega \cdot R^2, \quad (2.31)$$

Für die Parameter $B = 1\text{T}$, $R = 10\text{cm}$, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}$ ergibt sich die Klemmenspannung $u_L \approx 1,57\text{V}$

2.2.2 Lenz'sche Regel

Die Lenz'sche Regel besagt, daß der induzierte Strom in einer Leiterschleife der Ursache, d.h. der Änderung der Flußverkettung, entgegenwirkt. Anhand der Leiterschleife in Abbildung 2.13 soll dies nachgewiesen werden.

Die zeitlich veränderliche Induktion $B(t)$ soll von einem externen Magnetfeld herrühren. Unter Vorgabe der Zählpfeile für $B(t)$ und c , die ein Rechtssystem bilden, soll z.B. angenommen werden, daß die Induktion zunimmt ($\frac{dB(t)}{dt} > 0$). Dies ergibt dann eine Flußzunahme in der

durch den Zählpfeil von $B(t)$ vorgegebenen Richtung. Aus (2.32) folgt, daß der Vektor \vec{E}_i der Orientierung von c entgegengerichtet ist.

$$\oint_c \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Psi}{dt} < 0, \quad (2.32)$$

In der Leiterschleife wird ein Strom i_i induziert, der in Richtung von \vec{E}_i fließt und ein Magnetfeld erzeugt, dessen Richtung rechtsschraubend mit dem Strom verknüpft ist, und dessen Induktion in Abbildung 2.13 mit $\vec{B}(i_i)$ bezeichnet ist. Der vom induzierten Strom erzeugte Fluß in der Leiterschleife ist dem ursprünglichen Fluß entgegengesetzt und wirkt demnach der Ursache, d.h. der Flußzunahme von $\vec{B}(t)$ entgegen. Dies ist aber die Aussage der Lenz'schen Regel.

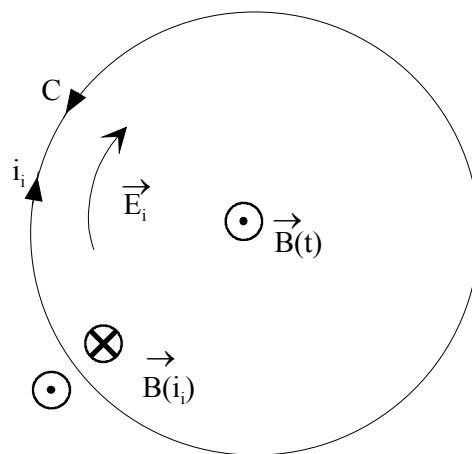


Abbildung 2.13: Skizze zur Lenz'schen Regel

2.3 Induktivität, Selbstinduktion von Leiterschleifen

Der Strom in einer Leiterschleife verursacht ein Magnetfeld. Dieses führt zu einem magnetischen Fluß, der mit der felderzeugenden Leiterschleife verkettet ist. Das Verhältnis von Flußverkettung zu erzeugendem Strom wird als Induktivität L der Leiterschleife bezeichnet:

$$L(i) = \frac{\Psi(i)}{i}, \quad (2.33)$$

Für die Einheit der Induktivität ergibt sich:

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[I]} = 1 \frac{Vs}{A} = 1H \text{ (Henry)} \quad (2.34)$$

In Anwesenheit von ferromagnetischem Material ist die Induktivität stromabhängig. Im folgenden soll zunächst von linearer, isotroper Materie ausgegangen werden. Damit folgt, daß Induktion und Fluß und damit auch die Flußverkettung proportional zum felderzeugenden Strom sind:

$$\Psi = L \cdot i. \quad (2.35)$$

Die Induktivität ist nur noch abhängig von der Schleifengeometrie und vom Material.

Beispiel 1: Induktivität einer idealen Zylinderspule in Luft

Innerhalb der Zylinderspule ergibt sich nach (1.15) ein homogenes Induktionsfeld

$$B_z = \mu_0 \frac{n \cdot I}{l}. \quad (2.36)$$

für eine Spule der Länge l mit n Windungen. Bei einer Kreiszylinderspule mit der Querschnittsfläche $A = \pi \cdot R^2$ ergibt sich als Fluß:

$$\phi = B_z \cdot A = \mu_0 \frac{n \cdot I}{l} A. \quad (2.37)$$

Die Spulenwicklung umfaßt den Fluß n mal, d.h. sie ist n mal mit dem Fluß verkettet. Die Flußverkettung beträgt demnach:

$$\Psi = n \cdot \phi = \mu_0 \frac{n^2 I}{l} A. \quad (2.38)$$

Daraus folgt für die Induktivität der Zylinderspule:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{n^2 A}{l}. \quad (2.39)$$

Beispiel 2: Spule mit hochpermeablem Kern

Die Spule in Abbildung 2.1 habe den Kernquerschnitt A , die mittlere Kernlänge l und das Kernmaterial habe die relative Permeabilität μ_r . Gemäß (1.64) beträgt der magnetische

Widerstand des Kerns $R_m = \frac{l}{\mu_r \mu_0 \cdot A}$.

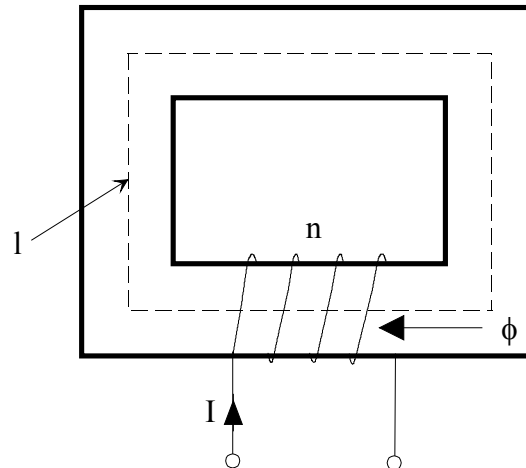


Abbildung 2.14: Spule mit hochpermeablem Kern

Aus der Äquivalenz magnetischer Kreise mit elektrischen Netzwerken ergibt sich der Fluß im Kern zu:

$$\phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{n \cdot I}{R_m} \quad (2.40)$$

Die Wicklung ist n mal mit dem Fluß verkettet, so daß sich für die Induktivität ergibt:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{n \cdot \Phi}{I} = \frac{n^2}{R_m} = \mu_r \mu_0 \frac{n^2 \cdot A}{l} \quad (2.41)$$

Wegen der Flußverkettung mit dem selbst erzeugten Magnetfeld wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert, wenn sich der Strom in der Leiterschleife ändert. Dieser Effekt wird als **Selbstinduktion** bezeichnet und soll am folgenden Modell einer einfachen Leiterschleife untersucht werden. In Abbildung 2.15 ist eine Leiterschleife dargestellt, in die von einer Stromquelle ein Strom eingepreßt wird. Flußverkettung, Umlauf c , Strom I in der Leiterschleife und induzierte Spannung sind so orientiert, daß sie miteinander ein Rechtssystem bilden. An den Klemmen wird das Verbraucherzählpeilsystem verwendet.

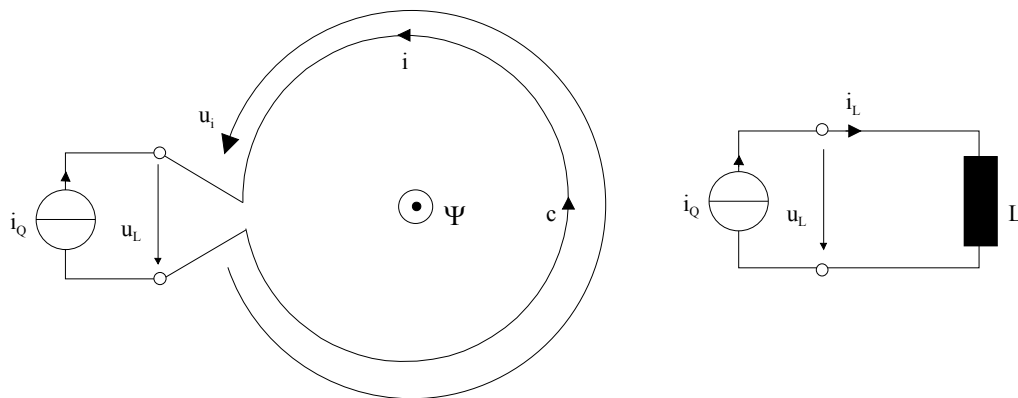


Abbildung 2.15: Zur Selbstinduktion einer Leiterschleife

$$i_q = i_L = -i, \quad (2.42)$$

$$\Psi = L \cdot i = -L \cdot i_L, \quad (2.43)$$

$$u_i = u_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di_L}{dt}, \quad (2.44)$$

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}, \quad (2.45)$$

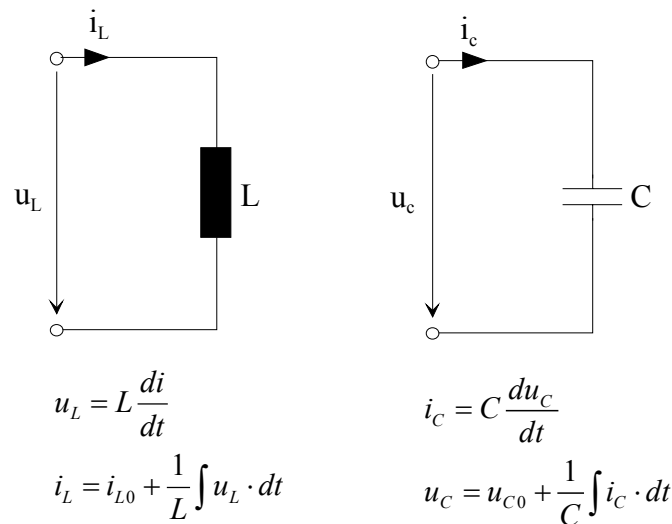
Gleichung (2.45) wird in Abbildung 2.15 rechts als elektrisches Ersatzschaltbild dargestellt. Das Schaltsymbol L repräsentiert einen Zweipol, der die Eigenschaft „Induktivität“ besonders ausgeprägt besitzt. Es handelt sich in der Regel um Spulen, oft mit einem hochpermeablen Kern. Entsprechende Bauelemente werden im Sprachgebrauch als **Induktivitäten** oder einfach als **Spulen** bezeichnet.

Durch Integration von (2.45) ergibt sich:

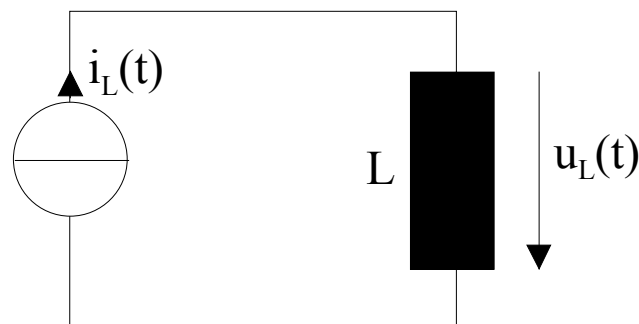
$$i_L = i_{L0} + \frac{1}{L} \int u_L \cdot dt. \quad (2.46)$$

i_{L0} ergibt sich als Integrationskonstante und entspricht einem beliebigen Gleichstrom.

In Abbildung 2.16 sind die Schaltsymbole und die Strom - Spannungsbeziehung der Zweipole „Induktivität“ und „Kapazität“ einander gegenübergestellt.


Abbildung 2.16: Strom – Spannungsbeziehung von Induktivität und Kapazität

Beispiel 3: Spannung an einer Induktivität L mit eingepägtem harmonischem Strom $i_L(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$ (s. Abbildung 2.17)


Abbildung 2.17: Skizze zu Beispiel 3

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot I_0 \cdot \frac{d}{dt} \sin \omega t = I_0 \cdot \omega \cdot L \cdot \cos \omega t \quad (2.47)$$

$$= U_0 \cdot \cos \omega t = U_0 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$u_L = U_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } U_0 = I_0 \cdot \omega \cdot L = I_0 \cdot Z_L. \quad (2.48)$$

Die Amplitude der Spannung ist nach (2.48) proportional zur Frequenz. Das Produkt $Z_L = \omega \cdot L$ ist dimensionsmäßig ein Widerstand und wird als Impedanz bezeichnet. Die Spannung eilt dem Strom in der Induktivität um eine Viertelperiode bzw. um 90° voraus. Das Zeitverhalten von Strom und Spannung ist im Diagramm in Abbildung 2.18 dargestellt.

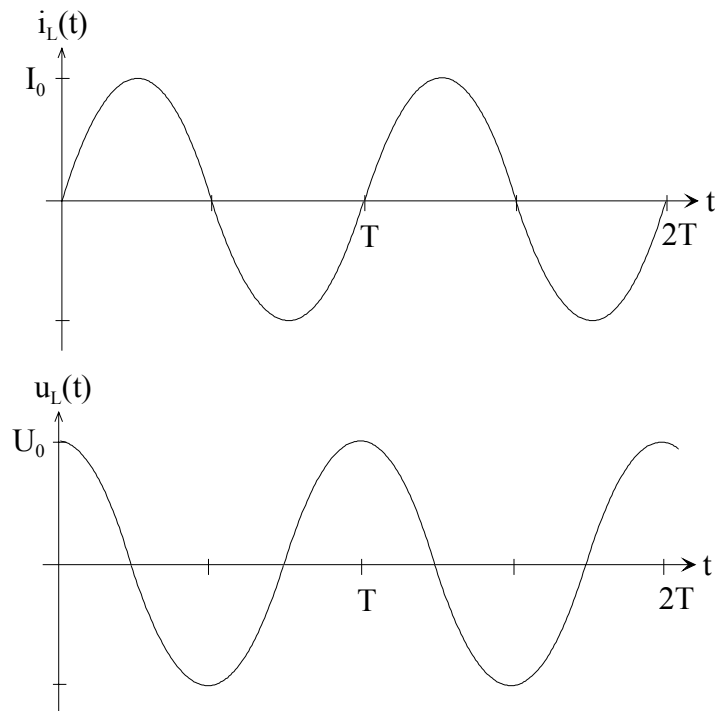


Abbildung 2.18: Diagramm zu Beispiel 3

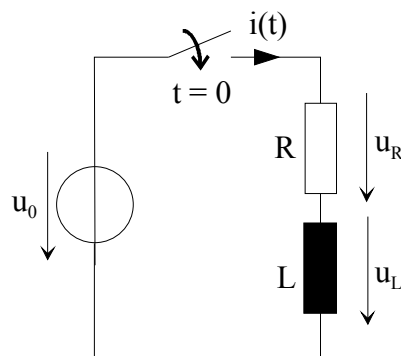
Beispiel 4: Einschalten einer Reihenschaltung aus Widerstand und Induktivität

Abbildung 2.19: Skizze zu Beispiel 4

Gemäß Skizze in Abbildung 2.19 soll die Reihenschaltung aus Widerstand und Induktivität zu Zeitpunkt $t = 0$ an eine ideale Spannungsquelle geschaltet werden. Vor dem Einschalten sei die Induktivität stromfrei ($i(t \leq 0) = 0$).

Die Maschengleichung des Stromkreises lautet:

$$U_0 = u_R + u_L = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}. \quad (2.49)$$

Daraus resultiert die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{di}{dt} + i \cdot \frac{R}{L} = \frac{U_0}{L}. \quad (2.50)$$

Nach Voraussetzung gilt die Anfangsbedingung

$$i(t \leq 0) = 0. \quad (2.51)$$

Gemäß dem „Taschenbuch der Mathematik“ von Bronstein et. al. lautet die Lösung von (2.50):

$$i = \exp\left(-\int \frac{R}{L} dt\right) \cdot \left[\int \frac{U_0}{L} \cdot \exp\left(\int \frac{R}{L} dt\right) dt + const \right], \quad (2.52)$$

Die Konstante ergibt sich, indem die Anfangsbedingung (2.51) in die Lösung eingesetzt wird:

$$i(0) = 0 = \frac{U_0}{R} + const. \quad (2.53)$$

Die Lösung lautet damit endgültig:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ mit } \tau = \frac{L}{R}. \quad (2.54)$$

τ wird als **Zeitkonstante** des Einschwingvorgangs bezeichnet. Im stationären Zustand erreicht der Strom den Maximalwert:

$$i(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{R}. \quad (2.55)$$

Dies erkennt man auch an der Differentialgleichung (2.50), wenn man berücksichtigt, daß im stationären Zustand $\frac{di}{dt} = 0$ gilt.

Aus der Lösung (2.54) für den Strom ergibt sich die Spannung an der Induktivität:

$$u_l(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (2.56)$$

Zum Zeitpunkt des Einschaltens liegt die gesamte Spannung an der Induktivität, da noch kein Strom fließt und demnach keine Spannung am Widerstand R abfällt. Die Spannung an der Induktivität geht exponentiell mit der Zeitkonstanten τ gegen 0. Die entsprechenden Zeitfunktionen sind in Abbildung 2.20 dargestellt.

Nach dem Aufmagnetisieren der Induktivität kann der Schalter in Abbildung 2.19 nicht problemlos geöffnet werden. Damit würde versucht, den Strom augenblicklich abzuschalten. Dies aber führt zu einer hohen induzierten Spannung, die einen Lichtbogen an den Schaltkontakten ergibt. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß eine aufmagnetisierte Spule magnetische Energie speichert. Diese wird beim Abschalten im Lichtbogen verbraucht. Das kann zur Zerstörung der Schaltkontakte führen. Durch eine **Freilaufdiode** (s. Abbildung 2.21) wird gewährleistet, daß der Strom durch die Induktivität im Schaltaugenblick weiterfließen kann. Die gespeicherte Energie wird im Widerstand verbraucht. Die an den Schaltkontakten auftretenden Spannungen werden deutlich verringert. Bei geschlossenem Schalter wirkt sich die Diode nicht aus, da sie in **Sperrichtung** betrieben wird. Für Ströme entgegengesetzt zur Richtung des Diodensymbols bildet die Diode einen hohen Widerstand. Für Ströme in Richtung des Symbols ist der Widerstand sehr gering (Ventilwirkung).

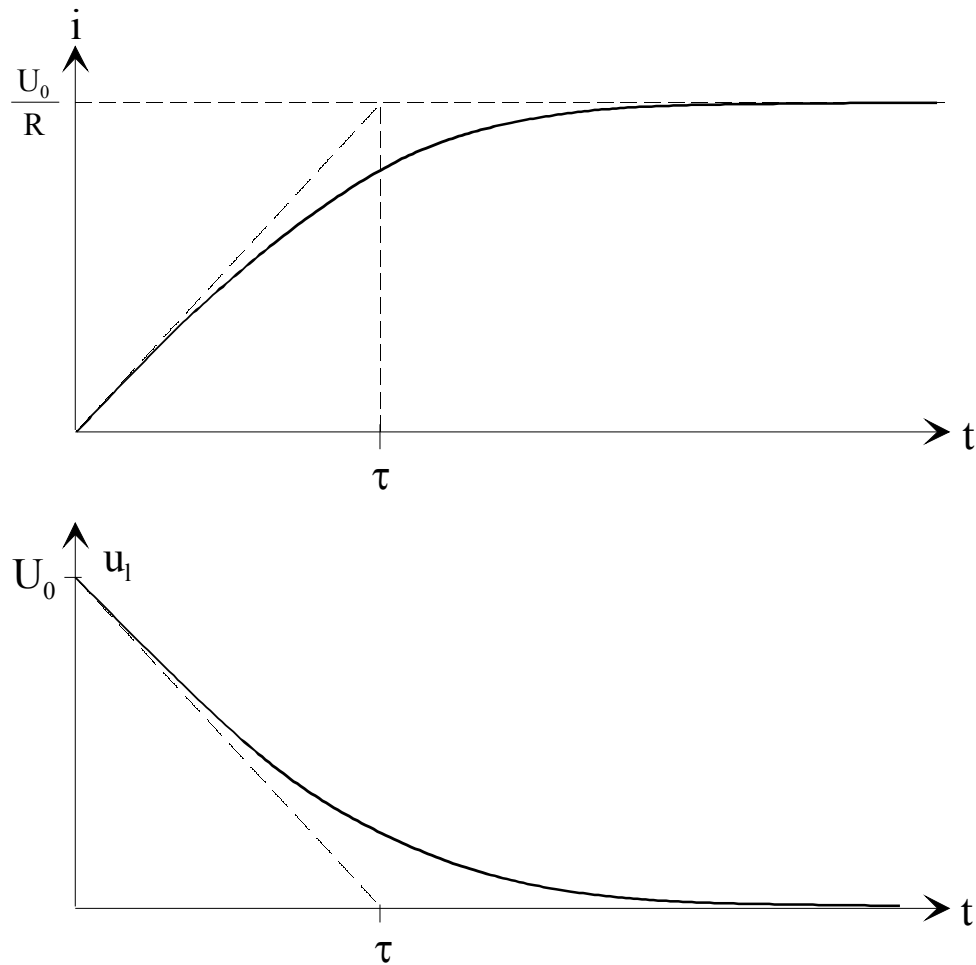


Abbildung 2.20: Zeitfunktionen von Spannung und Strom der Induktivität in Beispiel 4

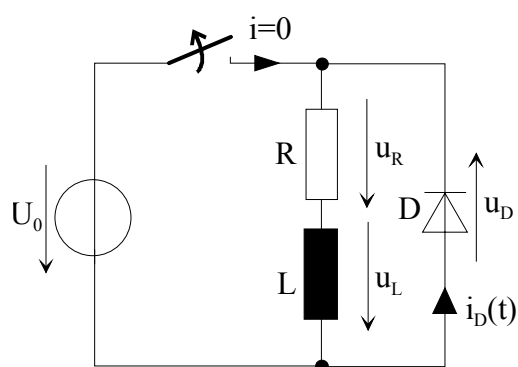


Abbildung 2.21: Freilaufdiode

2.4 Energie des magnetischen Feldes

Die Induktivität L soll über eine zeitabhängige Stromquelle $i(t)$ bis zum stationären Strom I_0 gemäß Abbildung 2.22 aufmagnetisiert werden. Die Zeitfunktion $i(t)$ ist weitestgehend beliebig bis auf folgende Voraussetzungen:

- $i_q(t < 0) = 0$, damit verschwindet die magnetische Energie der Induktivität für $t < 0$,
- die Zeitfunktion $i_q(t)$ ist stetig für $0 \leq t \leq t_0$,
- $i_q(t > t_0) = I_0$.

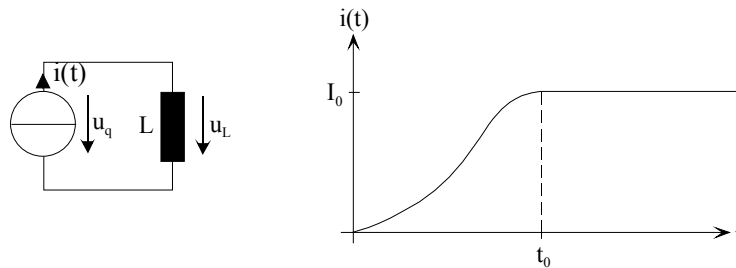


Abbildung 2.22: Aufmagnetisieren einer Induktivität

Die Quelle liefert in einem Zeitintervall die Energie

$$dW_q = i_q \cdot u_q \cdot dt = i_q \cdot u_L \cdot dt = i_q \cdot L \cdot \frac{di_q}{dt} dt = i_q \cdot L \cdot di_q = dW_m. \quad (2.57)$$

Dies entspricht der Änderung der magnetischen Feldenergie dW_m

$$dW_m = L \cdot i_q \cdot di_q. \quad (2.58)$$

Für die bis zum Zeitpunkt t_0 gespeicherte magnetische Energie ergibt sich

$$W_m = \int_0^{t_0} dW_m = L \cdot \int_0^{I_0} i_q \cdot di_q = \frac{1}{2} L \cdot i_q^2 \Big|_0^{I_0}. \quad (2.59)$$

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2. \quad (2.60)$$

Wegen $i_q = I_0$ für $t > t_0$ ist $u_L = u_q = 0$, so daß die Quelle nach diesem Zeitpunkt keine Arbeit mehr leistet.

Mit $\Psi = L \cdot I$ folgt:

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \Psi \cdot I = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L}. \quad (2.61)$$

Zum Vergleich ergab sich für die elektrische Energie eines Kondensators:

$$W_{el} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

2.4.1 Die Energiedichte im magnetischen Feld

Nach Auffassung der Feldtheorie ist das Feld, d.h. der felderfüllte Raum, Träger der Feldenergie. Demnach läßt sich eine Energiedichte

$$w_m = \frac{dW_m}{d\tau} \quad (2.62)$$

definieren.

Um die Herleitung einfacher zu gestalten, soll die Untersuchung am homogenen Feld einer idealen Zylinderspule (n, l, A) vorgenommen werden. Die Magnetisierungskurve des verwendeten Kernmaterials soll stetig sein. Hystereseeffekte werden allerdings ausgeschlossen.

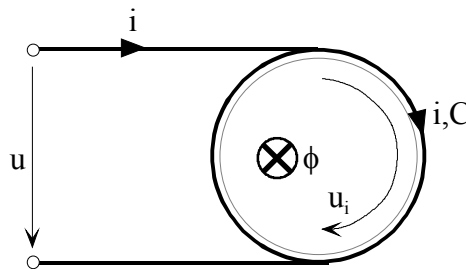


Abbildung 2.23: Ideale Zylinderspule mit Kern, Festlegung der Zählpfeile

Bei Verwendung der in Abbildung 2.23 dargestellten Orientierungen der Zählpfeile ergibt sich:

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -n \cdot \frac{d\phi}{dt}, \quad (2.63)$$

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = n \cdot \frac{d\phi}{dt}, \quad (2.64)$$

$$u \cdot dt = n \cdot d\phi. \quad (2.65)$$

Für die Arbeit, die der Spule zugeführt wird, folgt:

$$dW = u \cdot i \cdot dt = n \cdot i \cdot d\phi, \quad (2.66)$$

$$d\phi = A \cdot dB, \quad (2.67)$$

$$H = \frac{n \cdot i}{l} \rightarrow i = \frac{H \cdot l}{n}, \quad (2.68)$$

$$dW = n \cdot \frac{H \cdot l}{n} \cdot A \cdot dB = \tau \cdot H \cdot dB \text{ mit } \tau = \text{Kernvolumen}, \quad (2.69)$$

$$dw = \frac{dW}{\tau} = H \cdot dB. \quad (2.70)$$

(2.70) führt zur magnetischen Energiedichte:

$$w_{magn} = \int_0^{B_e} H \cdot dB. \quad (2.71)$$

Obwohl am Beispiel des homogenen Feldes einer Zylinderspule hergeleitet, gilt dies auch für die magnetische Energiedichte inhomogene Felder.

Für den Spezialfall linearer Materie ($\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$) folgt:

$$w_{\text{magn}} = \int_0^{B_z} H \cdot dB = \frac{1}{\mu} \int_0^{B_z} B \cdot dB = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} H \cdot B = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2. \quad (2.72)$$

Beispiel: Es soll die magnetische Energie im Luftspalt einer Elektrischen Maschine mit Luftspalllänge $\vartheta = 1\text{mm}$, Luftspaltquerschnitt $A = 10\text{cm}^2$ und Luftspaltinduktion $B = 1,5\text{T}$ bestimmt werden:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{(1,5)^2 \cdot T^2 Am}{4\pi \cdot 10^{-7} Vs} = \frac{2,25V^2s^2 Am}{8\pi \cdot 10^{-7} Vsm^4} \approx 0,9 \cdot 10^6 \frac{Ws}{m^3} = 0,9 \frac{Ws}{cm^3}. \quad (2.73)$$

Die elektrische Energiedichte ist durch die Durchschlagfeldstärke $E_{\text{max}} = 10 \frac{kV}{cm}$ der Luft beschränkt. Damit ergibt sich die maximale elektrische Energiedichte zu:

$$w_{el} = \frac{1}{2} E \cdot D = \frac{1}{2} \cdot 10^6 \frac{V}{m} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 10^6 \frac{V}{m} = 4,4 \cdot 10^{-6} \frac{Ws}{cm^3}. \quad (2.74)$$

Die maximale magnetische Energiedichte in Luft ist etwa um den Faktor 10^6 größer als die maximale elektrische Energiedichte. Damit ist verständlich, daß elektrische Maschinen auf magnetischen Feldwirkungen beruhen.

2.4.2 Berechnung der Induktivität aus der magnetischen Energie

Für die magnetische Energie einer Leiterschleife gilt:

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2. \quad (2.75)$$

Ist die magnetische Energie einer Anordnung bekannt, kann daraus deren Induktivität berechnet werden:

Beispiel: Ideale Zylinderspule in Luft

$$w_m = \int_0^{B_z} H \cdot dB = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{B_z} B \cdot dB = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_z^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} H_z \cdot B_z = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H_z^2, \quad (2.76)$$

$$H_z = \frac{n \cdot I}{l}, \quad (2.77)$$

$$W_m = \tau \cdot w_m = A \cdot l \cdot \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot I^2}{l^2} = \frac{1}{2} L \cdot I^2, \quad (2.78)$$

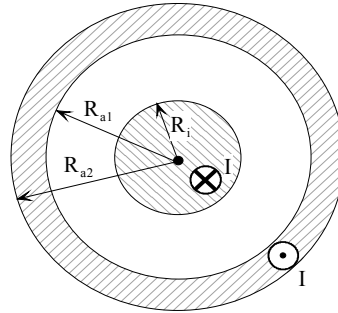
$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{l}, \quad \text{vgl. (2.39)}. \quad (2.79)$$

Beispiel: Koaxialkabel

Für ein Koaxialkabel, dessen Querschnitt in Abbildung 2.24 dargestellt ist, sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- $\mu = \mu_0$ im gesamten Raum,
- homogene Stromverteilung in den Leitern,
- $R_{a2} - R_{a1} \ll R_{a1}$; $R_{a1} \gg R_i$.

Aus der gespeicherten magnetischen Energie pro Längeneinheit bei Stromfluß soll die Induktivität pro Längeneinheit $L' = \frac{dL}{dl}$ bestimmt werden.


Abbildung 2.24: Querschnitt Koaxialkabel

a) Feld im Innenleiter $0 \leq r < R_i$:

$$H_\varphi = I \cdot \frac{r}{2 \cdot \pi \cdot R_i^2}, \quad \text{vgl. (1.41)}, \quad (2.80)$$

$$w_m(r) = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot H_\varphi^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2 \cdot \pi \cdot R_i^2} \right)^2 \cdot r^2 \quad (2.81)$$

$$W_m = \int_\tau w_m \cdot d\tau = \frac{l}{2} \cdot \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2 \cdot \pi \cdot R_i^2} \right)^2 \cdot \int_0^{R_i} r^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \mu_0 \cdot \frac{I^2}{16 \cdot \pi} \cdot l, \quad (2.82)$$

$$W'_m = \frac{W_m}{l} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{16 \cdot \pi}, \quad (2.83)$$

$$L'_i = \frac{\mu_0}{8 \cdot \pi} = \frac{L_i}{l}, \quad (2.84)$$

L'_i ist die sog. **innere Induktivität** eines langgestreckten zylindrischen Leiters pro Längeneinheit. Sie ist offensichtlich unabhängig vom Radius des Leiters.

b) Feld in der Isolation $R_i \leq r < R_{a1}$:

$$H_\varphi = I \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad \text{vgl. (1.37)}, \quad (2.85)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot H_\varphi^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \right)^2, \quad (2.86)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \left(\frac{I}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot l \cdot \int_{R_i}^{R_{a1}} \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r^2} \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{I^2}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{R_{a1}}{R_i}, \quad (2.87)$$

$$L_a' = \frac{L_a}{l} = 2 \frac{W_m}{I^2 \cdot l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_{a1}}{R_i}, \quad (2.88)$$

L_a' ist die sog. **äußere Induktivität**, da es sich um das Feldgebiet außerhalb des Leiters handelt.

c) Feld im Außenleiter $R_{a1} \leq r < R_{a2}$:

Die Feldstärke, die vom Innenleiter herrührt nimmt mit $1/r$ ab. Zusätzlich wird das Feld im Außenleiter durch den Gegenstrom geschwächt. Außerdem ist der Außenleiter nach Voraussetzung sehr dünn. Es ist daher anzunehmen, daß die „innere Induktivität“ des Außenleiters gegenüber der inneren Induktivität des Innenleiters und gegen die äußere Induktivität vernachlässigbar ist ($L'_{ia} \ll L'_i + L'_a$).

d) Gesamtinduktivität:

$$L' \approx \frac{\mu_0}{8 \cdot \pi} \cdot \left(1 + 4 \cdot \ln \frac{R_{a1}}{R_i} \right), \quad (2.89)$$

Es soll nun abgeschätzt werden, welcher Fehler durch die Vernachlässigung der inneren Induktivität des Außenleiters begangen wird. Mit $R_{a2} = 2 \cdot R_i$ und $R_{a2}^2 - R_{a1}^2 = R_i^2$ (gleiche Stromdichte im Innen- und Außenleiter) ergibt sich

$$\frac{L'_a}{L'} \approx 0,04$$

und damit ein Fehler von ca. 4%. Bei einem 75Ω Antennenkabel betragen die Radien jedoch $R_{a2} = 3,1\text{mm}$ und $R_i = 0,35\text{mm}$, so daß der Fehler erheblich geringer wird. Die Näherung ist demnach zulässig.

2.4.3 Kraft auf die Grenzflächen des Luftspalts eines Magnetkreises

In Abbildung 2.25 ist ein Magnetkreis mit einem Luftspalt der Länge d dargestellt. Es soll vorausgesetzt werden, daß die Permeabilität des Magnetmaterials um Größenordnungen größer als die Permeabilität der Luft ist ($\mu_{Fe} \gg \mu_0$). Außerdem sei der Luftspalt hinreichend kurz, so daß die Streuung vernachlässigt werden kann. In diesem Fall ist wegen $H_{Luft} \gg H_{Fe}$ nahezu die gesamte magnetische Energie des Kreises im Luftspalt gespeichert.

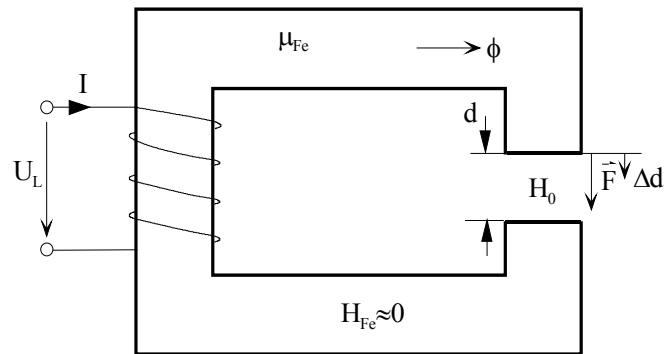


Abbildung 2.25: Magnetkreis mit Luftspalt

Es soll nun das Prinzip der virtuellen Verrückung angewendet werden. Die Kraft wirkt in Richtung einer Verkürzung des Luftspalts, da entgegengesetzte Magnetpole an den Enden des Magnetkerns entstehen. Bei einer Verringerung des Luftspalts um Δd ändert sich die Feldenergie bei konstantem Erregerstrom um:

$$\Delta W_{magn} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot [\Psi_{(d-\Delta d)} - \Psi_{(d)}]. \quad (2.90)$$

Bei der Verrückung wird eine Spannung in der Erregerwicklung induziert, da sich der Fluß und damit die Flußverknüpfung ändert. Dies ist die Änderung der Gesamtenergie, die von der Quelle aufgebracht werden muß:

$$\Delta W_{el} = \Delta W_Q = I \int_0^{\Delta t} u_L \cdot dt = I \int_0^{\Delta t} \frac{d\Psi}{dt} dt = I [\Psi_{(d-\Delta d)} - \Psi_{(d)}]. \quad (2.91)$$

Die geleistete mechanische Arbeit beträgt:

$$\Delta W_{mech} = F \cdot \Delta d. \quad (2.92)$$

Die Energiebilanz ergibt:

$$\Delta W_{el} = \Delta W_{magn} + \Delta W_{mech} = \Delta W_{magn} + F \cdot \Delta d, \quad (2.93)$$

$$F \cdot \Delta d = \frac{1}{2} \cdot I \cdot [\Psi_{(d-\Delta d)} - \Psi_{(d)}], \quad (2.94)$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{\Psi_{(d-\Delta d)} - \Psi_{(d)}}{\Delta d} = -\frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{d\Psi}{dd}. \quad (2.95)$$

Mit

$$\Psi = \mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot I}{d} \cdot A, \quad \frac{d\Psi}{dd} = -\mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot I}{d^2} \cdot A \quad (2.96)$$

folgt das Ergebnis:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot I^2}{d^2} \cdot A. \quad (2.97)$$

Unter Voraussetzung eines homogenen Feldes im Luftspalt (geringe Streuung) gilt dann:

$$H_0 = \frac{n \cdot I}{d}, \quad B_0 = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot I}{d} \quad (2.98)$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot H_0 \cdot B_0 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot A. \quad (2.99)$$

Zahlenbeispiel: $B_0 = 1 \text{ T}$, $A = 10 \text{ cm}^2$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 \text{ Vs})^2 \cdot A \text{ m}}{\text{m}^4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs}} \cdot 0,01 \text{ m}^2 = \underline{\underline{3,98 \text{ kN}}}.$$

2.5 Gegeninduktion, Gegeninduktivität, Transformator

Ein Transformator ist eine Anordnung aus zwei Spulen, deren Magnetfelder, häufig über einen Magnetkreis, miteinander verkettet sind. Die Spulen sind in Abbildung 2.26 symbolisch als Leiterkreise dargestellt. Unter der Voraussetzung linearer Materie ist das Überlagerungsprinzip gültig.

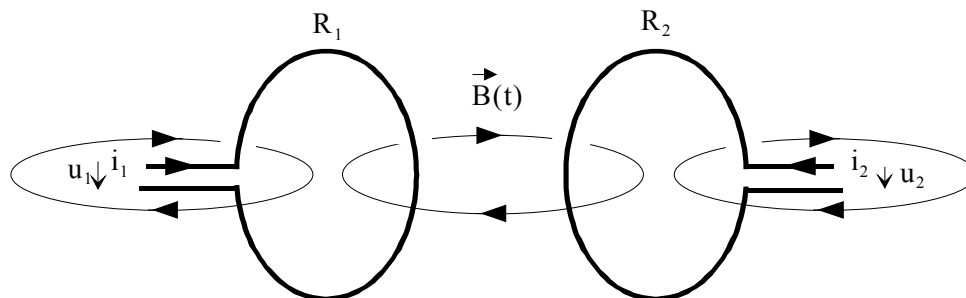


Abbildung 2.26: Magnetisch verkettete Leiterkreise.

Folgende beiden Fälle werden betrachtet und anschließend überlagert:

a) Nur Kreis 1 führt Strom i_1 :

$$\text{Flußverkettung Kreis 1: } \Psi_{11} = L_1 \cdot i_1$$

$$\text{Flußverkettung Kreis 2: } \Psi_{21} = L_{21} \cdot i_1$$

b) Nur Kreis 2 führt Strom i_2 :

$$\text{Flußverkettung Kreis 1: } \Psi_{12} = L_{12} \cdot i_2$$

$$\text{Flußverkettung Kreis 2: } \Psi_{22} = L_2 \cdot i_2$$

c) Überlagerung:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2 \quad (2.100)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} = L_{21} \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2$$

Die Parameter L_1 und L_2 werden als **Selbstinduktivitäten** der Leiterkreise bezeichnet. L_{12} und L_{21} sind die **Gegeninduktivitäten**

Unter der Annahme reziproke Materie läßt sich zeigen, daß

$$L_{12} = L_{21} = M \quad (2.101)$$

gilt. Es gilt $M > 0$, wenn positive Ströme in beiden Leiterschleifen gleichgerichtete Flüsse erzeugen, sonst ist $M < 0$.

Unter zusätzlicher Berücksichtigung von Ohmschen Widerständen ergeben sich durch Differentiation von (2.100) die Spannungen an den Leiterkreisen:

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1 \cdot R_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} \\ u_2 &= i_2 \cdot R_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Daraus folgt mit (2.100):

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1 \cdot R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= i_2 \cdot R_2 + M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Das Gleichungssystem (2.103) beschreibt den **verlustbehafteten Transformator**. Die Leiterschleifen sind die (meist über einen Magnetkreis) magnetisch gekoppelten Spulen. Durch die Gegeninduktion bewirkt eine Stromänderung in einem Kreis eine induzierte Spannung im anderen Kreis und umgekehrt. Die Terme in (2.103) bezeichnen:

- $i_1 \cdot R_1, i_2 \cdot R_2$: Die Ohmschen Spannungsabfälle der Wicklungen,
- $L_1 \frac{di_1}{dt}, L_2 \frac{di_2}{dt}$: Die Wirkung der Selbstinduktion,
- $M \frac{di_1}{dt}, M \frac{di_2}{dt}$: Die Wirkung der Gegeninduktion.

Transformatoren bzw. Übertrager sind Bauelemente, bei denen die Gegeninduktivitäten möglichst groß und die Wicklungswiderstände möglichst klein gehalten werden. Die Gegeninduktivitäten werden maximal, wenn der von der Spule 1 erzeugte Fluß vollständig mit Spule 2 und umgekehrt verkettet ist. Letzteres wird durch die Verwendung von Magnetkreisen weitgehend erreicht. Abbildung 2.27 zeigt symbolisch eine Realisierung des Gleichungssystems Abbildung 2.27 mit einem Magnetkreis. Bei einem idealen Magnetkreis gilt $\phi_1 = \phi_2$, d.h. der Streufluß verschwindet. Bei Streuung des Magnetfeldes ist nur jeweils ein Teil des Flusses mit der anderen Spule verkettet: $\phi_{Streu} \neq 0$

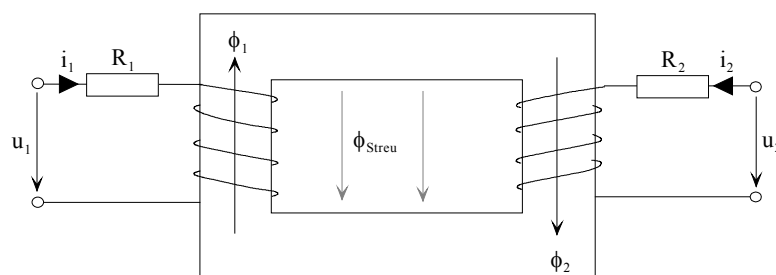


Abbildung 2.27: Transformator mit verlustbehafteten Wicklungen

Eine Idealisierung ergibt sich für $R_1 = R_2 = 0$. In diesem Fall spricht man vom **verlustfreien Transformator**.

Strefreier Transformator

Der Strefreie Transformator, der auch **Übertrager** genannt wird, ist ein idealisiertes Modell. Für die Flüsse in den Schenkeln gilt: $\phi_1 = \phi_2$. Für die Teilflüsse folgt dann:

$$\Phi_{11} = \frac{n_1 \cdot I_1}{R_m} = \Phi_{21}, \quad \Phi_{22} = \frac{n_2 \cdot I_2}{R_m} = \Phi_{12}. \quad (2.104)$$

Durch Multiplikation mit den jeweiligen Windungszahlen ergeben sich die Flußverkettungen der Spulen, jeweils mit Bezug zur felderzeugenden Spule:

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= n_1 \cdot \phi_{11} = n_1 \cdot \frac{n_1 \cdot I_1}{R_m} = L_1 \cdot I_1 : \quad L_1 = \frac{n_1^2}{R_m}, \\ \Psi_{21} &= n_2 \cdot \phi_{11} = n_2 \cdot \frac{n_1 \cdot I_1}{R_m} = L_{21} \cdot I_1 : \quad L_{21} = \frac{n_1 \cdot n_2}{R_m}, \\ \Psi_{22} &= n_2 \cdot \phi_{22} = n_2 \cdot \frac{n_2 \cdot I_2}{R_m} = L_2 \cdot I_2 : \quad L_2 = \frac{n_2^2}{R_m}, \\ \Psi_{12} &= n_1 \cdot \phi_{22} = n_1 \cdot \frac{n_2 \cdot I_2}{R_m} = L_{12} \cdot I_2 : \quad L_{12} = \frac{n_1 \cdot n_2}{R_m}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Zusammengefaßt gilt für den strefreien Transformator:

$$L_i = \frac{n_i^2}{R_m}, \quad (2.106)$$

$$L_{ij} = L_{ji} = M = \frac{n_i \cdot n_j}{R_m}, \quad (2.107)$$

$$M = \sqrt{L_i \cdot L_j}. \quad (2.108)$$

Transformator mit Streuung

Für den Transformator mit Streuung gilt für die Gegeninduktivität:

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} < \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad \text{mit } 0 \leq |k| \leq 1, \text{ Kopplungsfaktor.} \quad (2.109)$$

Dabei werden folgende Fälle unterschieden:

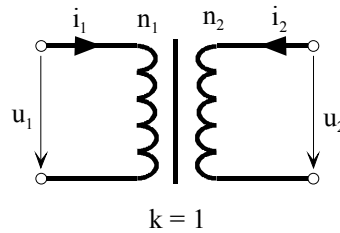
- $|k| = 1$ ideale Kopplung, keine Streuung,
- $|k| = 0$ keine magnetische Kopplung der Stromkreise,
- $k < 0$ negative Gegeninduktivität, Fluß der einen Spule schwächt den Fluß der anderen Spule.

Strefreier, verlustloser Transformator

Der strefreie, verlustlose Transformator wird auch als **idealer Übertrager** bezeichnet. Es gilt:

$$R_1 = R_2 = 0, \quad |k| = 1, \quad (2.110)$$

Das Schaltsymbol ist in Abbildung 2.28 dargestellt.

**Abbildung 2.28: Idealer Übertrager**

Im folgenden werden einige ausgezeichnete Betriebsfälle betrachtet:

- Leerlauf 1:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= 0, \\
 u_{1L} &= M \cdot \frac{di_2}{dt}, \quad u_{2L} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}, \\
 \frac{u_{2L}}{u_{1L}} &= \frac{L_2}{M} = \frac{n_2}{n_1}.
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

- Leerlauf 2:

$$\begin{aligned}
 i_2 &= 0, \\
 u_{1L} &= L_1 \cdot \frac{di_1}{dt}, \quad u_{2L} = M \cdot \frac{di_1}{dt}, \\
 \frac{u_{2L}}{u_{1L}} &= \frac{M}{L_1} = \frac{n_2}{n_1}.
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

In beiden Leerlauffällen verhalten sich die Leerlaufspannungen wie die Windungszahlen:

$$\frac{u_{1L}}{u_{2L}} = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.113}$$

- Kurzschluß 2: $u_2 = 0$ daraus folgt $\Psi_2 = const.$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = 0 = M \cdot \frac{di_{1K}}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_{2K}}{dt}, \tag{2.114}$$

$$\frac{di_{1K}}{dt} = -\frac{L_2}{M} \cdot \frac{di_{2K}}{dt} \text{ und durch Integration} \tag{2.115}$$

$$i_{1K} = -\frac{L_2}{M} \cdot i_{2K} + I_0 \tag{2.116}$$

Berücksichtigt man den Gleichstrom, der als Integrationskonstante eingeführt wurde nicht, ($I_0 = 0$), dann ergibt sich

$$\left| \frac{i_{1K}}{i_{2K}} \right| = \frac{n_2}{n_1}, \tag{2.117}$$

d.h., daß sich die Kurzschlußströme beim idealen Übertrager umgekehrt wie die Windungszahlen verhalten.

2.6 Reihen- und Parallelschaltung von Spulen

2.6.1 Ideale, ungekoppelte Spulen

Die Wicklungswiderstände werden vernachlässigbar. Die Flüsse der Spulen sind nicht miteinander verkettet.

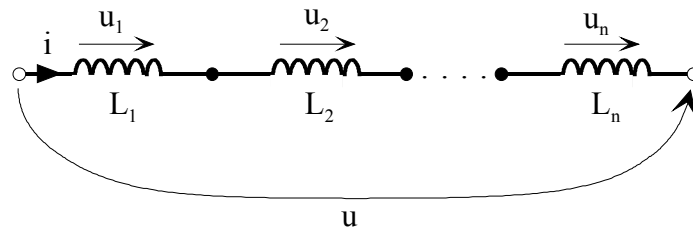


Abbildung 2.29: Serienschaltung ungekoppelter Spulen

Für die Serienschaltung gemäß Abbildung 2.29 gilt:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = L_1 \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} + \dots + L_n \cdot \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \cdot \frac{di}{dt},$$

$$L_{ges} = L_1 + L_2 + \dots + L_n. \tag{2.118}$$

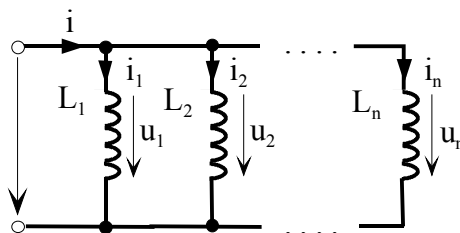


Abbildung 2.30: Parallelschaltung ungekoppelter Spulen

Für die Parallelschaltung gemäß Abbildung 2.30 gilt:

$$u = u_1 = u_2 = \dots = u_n, \quad i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt}.$$

Mit $\frac{di_k}{dt} = \frac{u}{L_k}$ und $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L_{ges}}$ folgt

$$\frac{u}{L_{ges}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} + \dots + \frac{u}{L_n} \text{ und damit}$$

$$\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}. \quad (2.119)$$

2.6.2 Zwei ideale, gekoppelte Spulen

Entsprechend Abbildung 2.31 gilt für die Serienschaltung:

$$u = u_1 + u_2,$$

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt}, \quad u_2 = L_2 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt},$$

$$u = (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) \frac{di}{dt}$$

Mit $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$ folgt

$$L_{ges} = L_1 + L_2 + 2 \cdot M = L_1 + L_2 + 2 \cdot k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}. \quad (2.120)$$

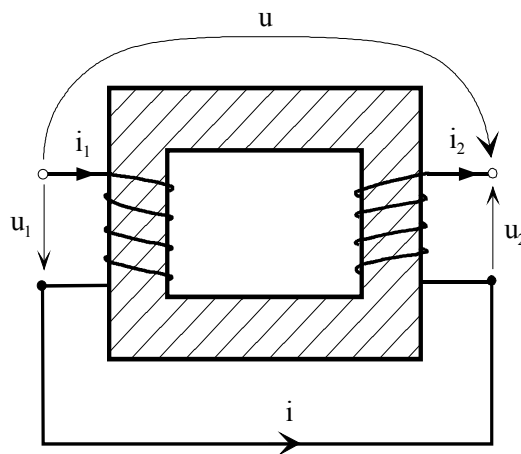


Abbildung 2.31: Serienschaltung von zwei gekoppelten Spulen

Spezieller Fall : $k=1$, idealer, streufreier Transformator:

$$L_{ges} = L_1 + L_2 + 2 \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2. \quad (2.121)$$

Mit $L_i = \frac{n_i^2}{R_m}$ folgt:

$$L_{ges} = \frac{1}{R_m} \cdot (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})^2 = L_1 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\right)^2 = L_2 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)^2. \quad (2.122)$$

2.6.3 Parallelschaltung zweier gekoppelter, verlustfreier Spulen:

Entsprechend Abbildung 2.31 gilt für die Serienschaltung:

$$i = i_1 + i_2, \quad u = u_1 = u_2$$

$$u = u_1 = L_1 \cdot \dot{i}_1 + M \cdot \dot{i}_2, \quad u = u_2 = M \cdot \dot{i}_1 + L_2 \cdot \dot{i}_2$$

Lösen nach \dot{i}_1 und \dot{i}_2 :

$$\dot{i}_1 = \frac{L_2 - M}{L_1 \cdot L_2 - M^2} \cdot u, \quad \dot{i}_2 = \frac{L_1 - M}{L_1 \cdot L_2 - M^2} \cdot u,$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{L} = \frac{L_1 + L_2 - 2 \cdot M}{L_1 \cdot L_2 - M^2} \cdot u.$$

$$\text{Mittkopplung, } M > 0 : L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2 \cdot |M|} \quad (2.123)$$

$$\text{Gegenkopplung, } M < 0 : L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2 \cdot |M|} \quad (2.124)$$

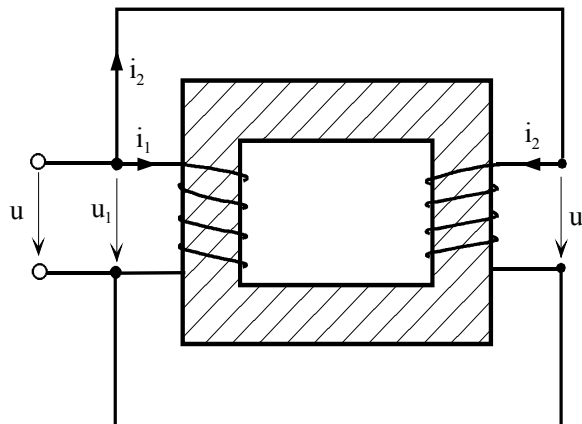


Abbildung 2.32: Parallelschaltung von zwei gekoppelten Spulen

3 Berechnung von Wechselstromschaltungen

Im folgenden wird davon ausgegangen werden, daß die Quellgrößen im Netzwerk periodisch zeitabhängige Größen sind. Zugelassene Netzwerkelemente sind, neben den Quellen, Widerstände R , Induktivitäten L , Kapazitäten C und Gegeninduktivitäten M (sog. RLCM-Netzwerke). Das hauptsächliche Ziel besteht in der Berechnung des eingeschwungenen Zustands für harmonisch zeitabhängige Quellgrößen.

3.1 Periodische zeitabhängige Größen

Eine periodische Zeitfunktion erfüllt die Bedingung (vgl. Abbildung 3.1):

$$i(t) = i(t \pm n \cdot T). \quad (3.1)$$

Dabei ist T die **Periodendauer**. Die Frequenz f und die Kreisfrequenz ω sind folgendermaßen definiert:

$$f = \frac{1}{T}, \quad [f] = \frac{1}{[T]} = 1s^{-1} = 1Hz \text{ (Hertz)}. \quad (3.2)$$

$$\omega = 2\pi \cdot f, \quad [\omega] = 1s^{-1}. \quad (3.3)$$

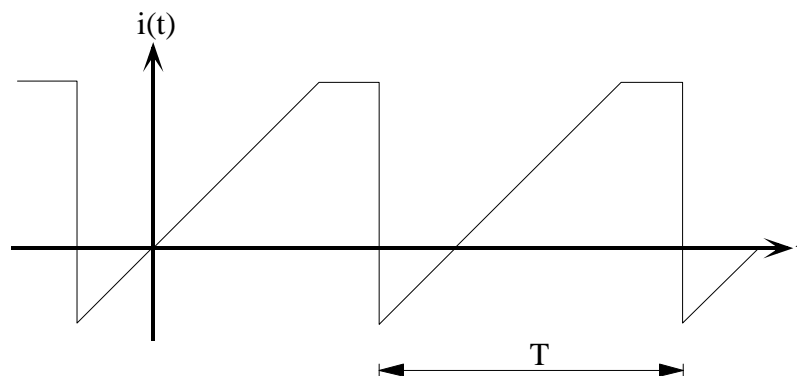


Abbildung 3.1: Periodische Zeitfunktion

3.1.1 Mittelwerte periodischer Größen

Gleichwert, arithmetischer Mittelwert

Definition:
$$\bar{i} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} i(t) \cdot dt. \quad (3.4)$$

Der Gleichwert eines Stromes ist damit proportional zu der pro Periode transportierten Ladung:

$$Q_p = \int_{t'}^{t'+T} i(t) \cdot dt = \bar{i} \cdot T. \quad (3.5)$$

Der Gleichwert eines periodischen elektrischen Stromes entspricht demnach einem Gleichstrom, der im Zeitraum T die gleiche Ladung transportiert und damit die gleiche elektrochemische Wirkung hat.

Effektivwert, quadratischer Mittelwert:

$$\text{Definition: } I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} i^2(t) dt} . \quad (3.6)$$

Beispiel: Ohmscher Widerstand

$$\begin{aligned} u(t) &= i(t) \cdot R, \\ p(t) &= u(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die pro Periode T umgesetzte elektrische Energie ergibt sich:

$$W_p = \int_{t'}^{t'+T} p(t) \cdot dt = R \cdot \int_{t'}^{t'+T} i^2(t) \cdot dt . \quad (3.8)$$

Gesucht wird ein Gleichstrom, der im Zeitraum T die gleiche Energie umsetzt.

$$\begin{aligned} W^* &= I^{*2} \cdot R \cdot T = R \int_{t'}^{t'+T} i^2(t) \cdot dt \\ I^* &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} i^2 \cdot dt} = I \end{aligned} \quad (3.9)$$

Der Effektivwert eines Stromes (einer Spannung) entspricht demnach einem Gleichstrom (einer Gleichspannung) der (die) an einem ohmschen Widerstand zum gleichem Energieumsatz pro Periode führt.

Definition der Wirkleistung:

Die Wirkleistung ist definiert als der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} p(t) dt . \quad (3.10)$$

Für einen ohmschen Widerstand gilt demnach:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} i^2 \cdot R dt = \frac{R}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} i^2 dt = I^2 \cdot R . \quad (3.11)$$

3.2 Harmonische Wechselgrößen

Jede periodische Zeitfunktion kann in eine Summe aus einer Gleichgröße und einer periodischen Zeitfunktion mit verschwindendem Gleichwert zerlegt werden.

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} i(t) \cdot dt. \quad (3.12)$$

$$i_w = i(t) - \bar{i}. \quad (3.13)$$

$$\bar{i}_w = \frac{1}{T} \cdot \int_{t'}^{t'+T} (i(t) - \bar{i}) \cdot dt = \bar{i} - \bar{i} = 0. \quad (3.14)$$

Definition Wechselgröße: Periodisch zeitabhängige Größe deren Gleichwert verschwindet.

Harmonische Wechselgröße: Wechselgröße mit harmonischer Zeitfunktion:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\varphi(t)) = x_0 \cdot \sin(\varphi(t) + \frac{\pi}{2}) = x_0 \cdot \sin(\varphi'(t)), \quad (3.15)$$

mit $\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0, \varphi'(t) = \omega \cdot t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = \omega \cdot t + \varphi_0', \quad (3.16)$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0'), \quad (3.17)$$

$$\varphi_0 = \varphi(0), \varphi_0' = \varphi'(0): \text{Nullphasenwinkel, } x_0: \text{Amplitude.}$$

Es ergibt sich eine identische Darstellung als Kosinus- bzw. Sinusfunktion mit unterschiedlichem Nullphasenwinkel. Die Forderung nach Periodizität ist durch die harmonischen Zeitfunktionen implizit erfüllt. Für die Kreisfrequenz gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f. \quad (3.18)$$

Wie für eine Wechselgröße gefordert, verschwindet der Gleichwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \cdot dt = 0. \quad (3.19)$$

Der Effektivwert einer harmonischen Wechselgröße ergibt sich zu:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} x_0^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) \cdot dt}.$$

mit $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ folgt:

$$X = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x_0^2}{T} \int_{t'}^{t'+T} [1 + \cos(2 \cdot \omega t + 2\varphi_0)] \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x_0^2}{T} \left[\int_{t'}^{t'+T} dt + \underbrace{\int_{t'}^{t'+T} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \cdot dt}_{=0} \right]}.$$

$$X = \frac{x_0}{\sqrt{2}}. \quad (3.20)$$

Der Effektivwert einer harmonischen Wechselgröße ist demnach gleich der Amplitude dividiert durch $\sqrt{2}$.

Der Effektivwert hat im Gegensatz zum Scheitelwert eine direkte technische Bedeutung, da sich die Wirkleistung aus dem Effektivwert ergibt (3.11). Häufig wird daher statt des Scheitelwerts, der Effektivwert in der Schreibweise einer harmonischer Wechselgröße verwendet:

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (3.21)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0). \quad (3.22)$$

X, I : Effektivwerte

3.3 Zeigerdarstellung harmonischer Wechselgrößen

Eine harmonische Wechselgröße

$$i(t) = i_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \sqrt{2} \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

kann geometrisch als Zeiger der Länge i_0 dargestellt werden, der mit einer Bezugsachse zum Zeitpunkt $t = 0$ den Winkel φ_0 einschließt und mit der Winkelgeschwindigkeit ω in mathematisch positivem Sinn (entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn) rotiert (vgl. Abbildung 3.2). Der Augenblickswert der harmonischen Wechselgröße ergibt sich als Projektion des Zeigers auf die Bezugsachse. Alternativ können die Zeiger als feststehend betrachtet werden und die Bezugsachse rotiert in mathematisch negativem Sinn. Wegen der technischen Bedeutung des Effektivwertes wird in der Regel als Länge des Zeigers der Effektivwerte $I_0 = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$ und nicht der Scheitelwert gewählt. In diesem Fall spricht man von **Effektivwertzeigern**.

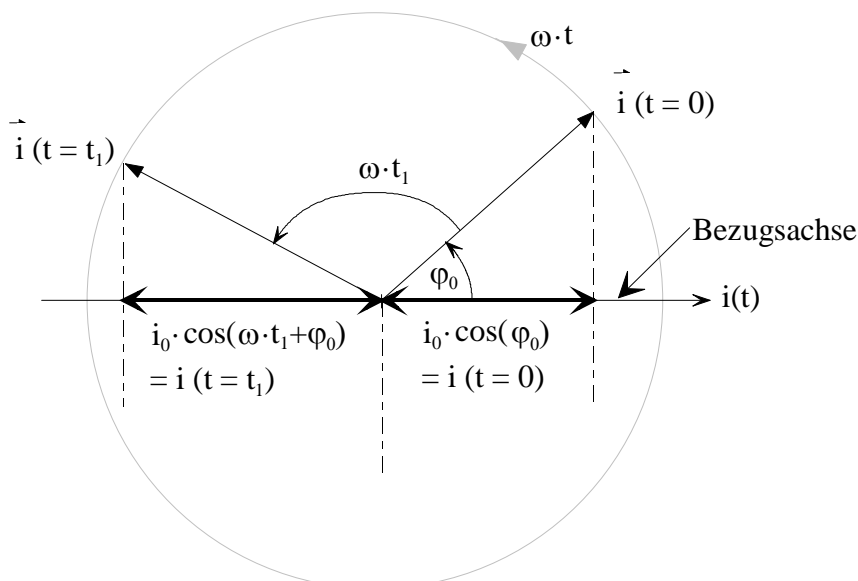


Abbildung 3.2: Zeigerdarstellung harmonischer Wechselgrößen

Effektivwertzeiger von harmonischen Wechselgrößen gleicher Frequenz werden wie Vektoren grafisch addiert bzw. subtrahiert. Damit können die Kirchhoffsche Knotenregel (KHK)

bzw. die Kirchhoffsche Maschenregel (KHM) anschaulich grafisch dargestellt werden. Resultierende Ströme oder Spannungen ergeben sich dabei grafisch, ohne komplizierte Berechnungen mit den Additionstheoremen von Winkelfunktionen.

In Abbildung 3.3 ist links ein Knoten eines Netzwerks dargestellt. Zwei der Ströme seien harmonische Wechselströme gleicher Frequenz:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ i_2(t) &= \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Der Strom

$$\begin{aligned} i_3(t) &= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \\ &= \sqrt{2} \cdot I_3 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_3) \end{aligned} \quad (3.24)$$

soll bestimmt werden.

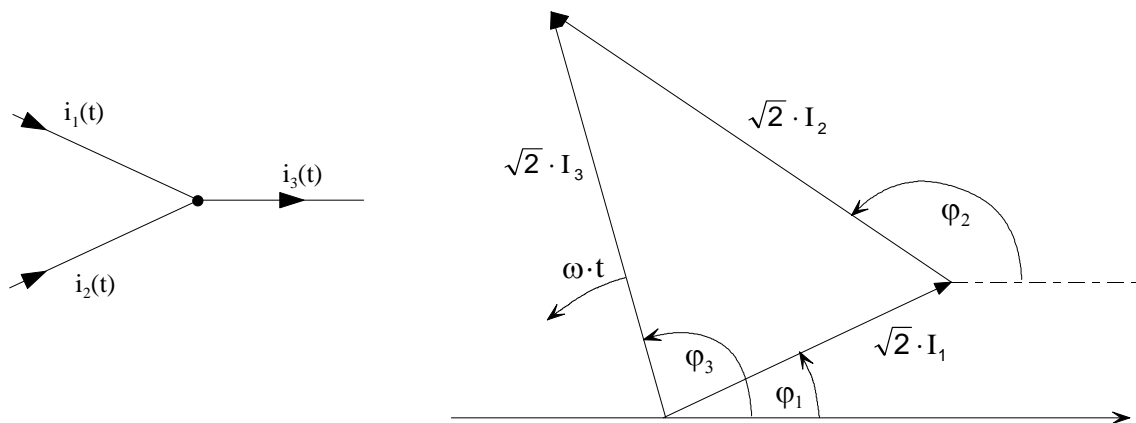


Abbildung 3.3: Zeigerdarstellung der KHK

Das Zeigerdiagramm in Abbildung 3.3 zeigt die Situation für $t = 0 + k \cdot T$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Die Darstellung im Zeigerdiagramm ist anschaulich und der Zeiger des resultierenden Stromes ist einfach abzulesen. Durch Anwendung der Theoreme der Winkelfunktionen ergibt sich aus (3.24):

$$\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ \varphi_3 &= \arctan \frac{I_1 \cdot \sin \varphi_1 + I_2 \cdot \sin \varphi_2}{I_1 \cdot \cos \varphi_1 + I_2 \cdot \cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Kirchhoffsche Maschenregel (KHM) kann entsprechend durch ein Zeigerdiagramm dargestellt werden.

3.4 Der eingeschwungene Zustand linearer Wechselstromschaltungen

Lineare Wechselstromschaltungen bestehen aus linearen Netzwerkelementen. Im folgenden wird von nachstehenden Elementen ausgegangen:

- Widerstände R: $u_R = R \cdot i_R$,
- Kapazitäten C: $i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$,
- Induktivitäten L: $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$,
- Unabhängige ideale Quellen mit identischer Frequenz:

$$\begin{aligned} i_q(t) &= \sqrt{2} \cdot I_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{i_q}) \\ u_q(t) &= \sqrt{2} \cdot U_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{u_q}) \end{aligned}$$

Bei den Quellen wird vorausgesetzt, daß ideale Stromquellen keine Schnittmengen bilden, und daß ideale Spannungsquellen keine Maschen bilden, da andernfalls die Kirchhoffschen Regeln verletzt würden. Gegebenenfalls können lineare gesteuerte Quellen und lineare Gegeninduktivitäten als Elemente hinzugefügt werden.

Für ein derartiges Netzwerk kann ein linear unabhängiges System von Netzwerkgleichungen nach folgenden Regeln erstellt werden:

- Wählen eines Baumes, der alle idealen Spannungsquellen aber keine idealen Stromquellen enthält,
- $s = k - 1$ linear unabhängige Schnittmengengleichungen:

$$\sum_S i_R + \sum_S i_C + \sum_S i_L = - \sum_S i_q(t), \quad (3.26)$$

- $m = z - k + 1$ linear unabhängige Maschengleichungen:

$$\sum_M u_R + \sum_M u_C + \sum_M u_L = - \sum_M u_q(t), \quad (3.27)$$

- z linear unabhängige Zweigggleichungen:

$$\begin{aligned} u_R &= R \cdot i_R, \\ i_C &= C \cdot \frac{du_C}{dt}, \\ u_L &= L \cdot \frac{di_L}{dt}, \\ i_q(t) &= \sqrt{2} \cdot I_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{i_q}), \\ u_q(t) &= \sqrt{2} \cdot U_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{u_q}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Das Gleichungssystem aus $2z$ linear unabhängige Gleichungen besteht aus gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sowie aus algebraischen Gleichungen und wird als System von **Differential-Algebraischen-Gleichungen (DAG)** bezeichnet.

Nach dem Einschalten der Quellen zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich aus der homogenen Lösung des Systems ein **Einschwingvorgang**, der abklingt. Nach dem Abklingen des Einschwingvorganges verbleibt die partikuläre Lösung des Systems, die auch als **eingeschwungener Zustand** bezeichnet wird. Dieser soll im folgenden nun betrachtet werden. Sämtliche Zweigströme und Zweigspannungen des eingeschwungenen Zustands sind dabei harmonische Zeitfunktionen:

$$\begin{aligned} i_z(t) &= \sqrt{2} \cdot I_z \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{iz}) \\ u_z(t) &= \sqrt{2} \cdot U_z \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uz}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

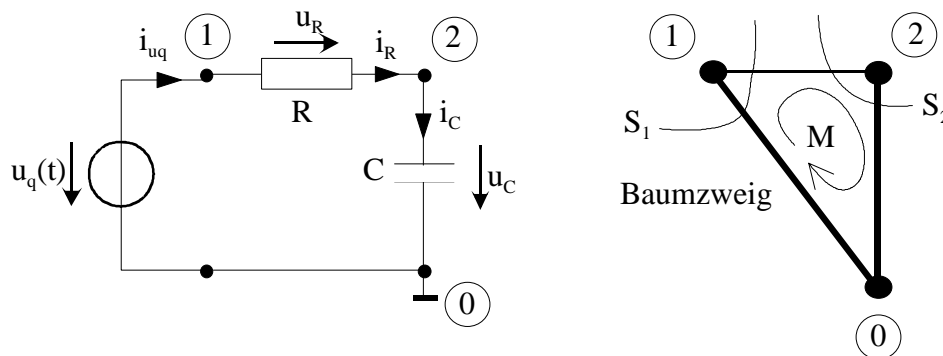


Abbildung 3.4: Beispiel einer linearen Wechselstromschaltung

Zur Untersuchung des Zeitverhaltens einer linearen Wechselstromschaltung wird beispielhaft die in Abbildung 3.4 gezeigte Schaltung betrachtet. Der gewählte Baum ist rechts in der Abbildung dargestellt. Entsprechend den o.a. Regeln ergibt sich nachstehendes System von **DAG**:

$$1. \quad m = z - k + 1 = 1 \text{ Maschengleichung:} \quad u_R + u_C = u_q(t) \quad (3.30)$$

$$2. \quad s = k - 1 = 2 \text{ Schnittmengengleichungen:} \quad i_{uq} - i_R = 0 \quad (3.31)$$

$$i_R - i_C = 0 \quad (3.32)$$

$$3. \quad z \text{ Zweiggleichungen:} \quad u_q = \sqrt{2} \cdot U_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uq}) \quad (3.33)$$

$$u_R = R \cdot i_R \quad (3.34)$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C \quad (3.35)$$

(3.31), (3.32), (3.34) und (3.35) eingesetzt in (3.30) ergeben:

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u_q(t). \quad (3.36)$$

Mit (3.33) und $\tau = R \cdot C$ folgt:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = \frac{\sqrt{2} \cdot U_q}{\tau} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uq}). \quad (3.37)$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in u_C , die folgendermaßen gelöst wird:

Lösung der homogenen Gleichung $\frac{du_{CH}}{dt} + \frac{u_{CH}}{\tau} = 0 :$ (3.38)

Als Lösungsansatz wird

$$u_{CH}(t) = K \cdot e^{-at}, \quad (3.39)$$

verwendet, wobei K eine beliebige Konstante sei. Daraus folgt

$$-K \cdot a \cdot e^{-at} + K \cdot \frac{e^{-at}}{\tau} = 0, \quad (3.40)$$

woraus sich

$$a = \frac{1}{\tau} \quad (3.41)$$

ergibt. Aus dem gewählten Ansatz (3.39) ergibt sich damit die Lösung der homogenen Gleichung zu:

$$u_{CH}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.42)$$

Lösung der inhomogenen Gleichung $\frac{du_{CP}}{dt} + \frac{u_{CP}}{\tau} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_q}{\tau} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uq}) :$ (3.43)

Als Lösungsansatz wird

$$u_{CP} = \sqrt{2} \cdot U_{CP} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uCP}), \quad (3.44)$$

verwendet. Daraus folgt:

$$-\sqrt{2} \cdot \omega \cdot U_{CP} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{uCP}) + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot U_{CP} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uCP}) = \frac{\sqrt{2} \cdot U_q}{\tau} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uq})$$

$$U_{CP} \cdot [\cos(\omega \cdot t + \varphi_{uCP}) - \omega \cdot \tau \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{uCP})] = U_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uq})$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme und Koeffizientenvergleich ergeben sich:

$$U_{CP} = \frac{U_q}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}} \text{ und } \varphi_{uCP} = \varphi_{uq} - \arctan(\omega \cdot \tau). \quad (3.45)$$

(3.45) eingesetzt in (3.44) liefert die sog. **partikuläre Lösung**.

Die Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung liefert die Gesamtlösung

$$u_C(t) = K \cdot u_{CH} + u_{CP}, \quad (3.46)$$

$$u_C(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \sqrt{2} \cdot U_{CP} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uCP}), \quad (3.47)$$

die die Differentialgleichung (3.37) erfüllt.

Die Konstante K ergibt sich aus der Anfangsbedingung $u_C(t=0)$. Wird z.B. $u_C(t=0) = 0$ gewählt, folgt $0 = K + \sqrt{2} \cdot U_{CP} \cdot \cos(\varphi_{uCP})$ und damit

$$K = -\sqrt{2} \cdot U_{CP} \cdot \cos(\varphi_{u_{CP}}). \quad (3.48)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (3.37) unter der gewählten Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$ lautet damit:

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_{CP} \cdot \left[\cos(\omega \cdot t + \varphi_{u_{CP}}) - \cos(\varphi_{u_{CP}}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (3.49)$$

mit

$$\tau = R \cdot C, U_{CP} = \frac{U_q}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}}, \varphi_{u_{CP}} = \varphi_q - \arctan(\omega \cdot \tau) \quad (3.50)$$

Die homogene Lösung klingt mit der Zeitkonstanten τ ab. Es verbleibt die partikuläre Lösung als eine harmonische Zeitfunktion, die als **eingeschwungener Zustand** bezeichnet wird:

$$u_{CE}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{CP} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{u_{CP}}). \quad (3.51)$$

Abbildung 3.5 zeigt als Beispiel für einen Einschwingvorgang die grafische Darstellung von (3.49) für $\omega = 2\pi \cdot 50\text{Hz}$ und $\tau = 100\text{ms}$. Man erkennt, daß die Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$ erfüllt ist. Der Einschwingvorgang ist nach mehreren Zeitkonstanten τ weitgehend abgeschlossen und es verbleibt eine reine harmonische Schwingung als **eingeschwungener Zustand**.

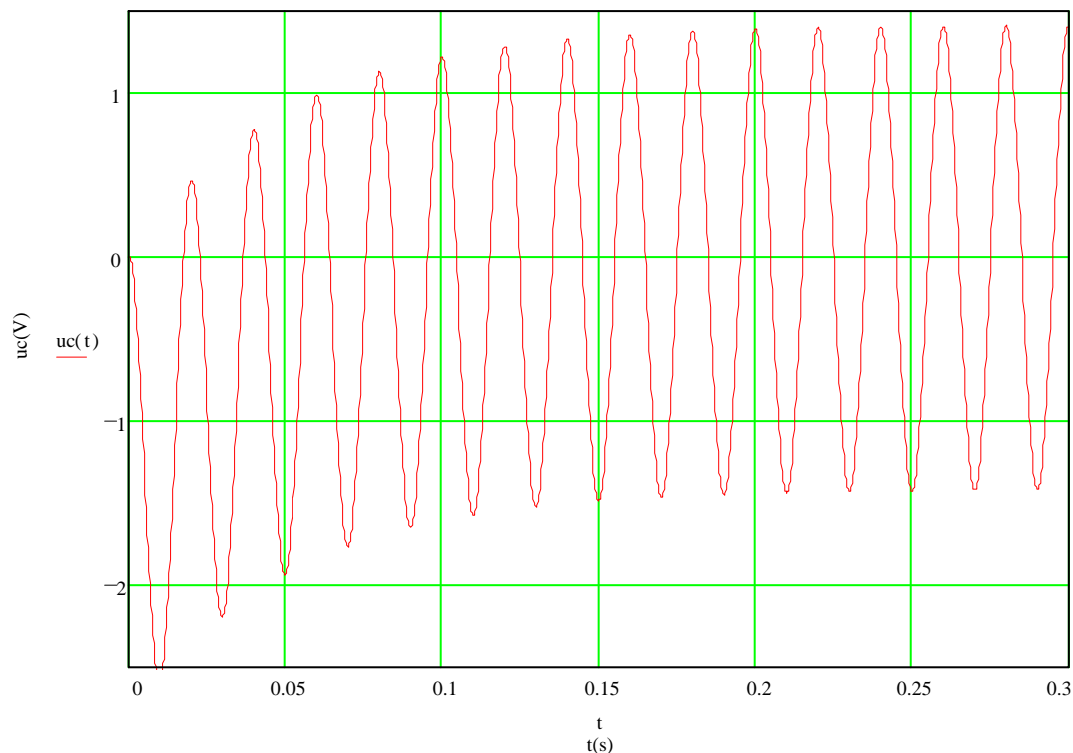


Abbildung 3.5: Beispiel für Einschwingvorgang

Bei linearen Wechselstromschaltungen interessiert nun lediglich der eingeschwungene Zustand. Man nimmt also an, daß der Einschaltzeitpunkt der Quellen so weit zurückliegt, daß sämtliche Einschwingvorgänge vollständig abgeklungen sind.

3.5 Harmonische Wechselgrößen als komplexe Effektivwertzeiger

3.5.1 Komplexe Zahlen und Größen

Im folgenden wird lediglich eine kurze Zusammenfassung gegeben. Es sei auf die Lehrveranstaltung „Höhere Mathematik“ verwiesen.

Für die imaginäre Einheit wird in der Elektrotechnik der Buchstabe j statt i verwendet, um einer Verwechslung mit der Bezeichnung für den elektrischen Strom vorzubeugen:

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1. \quad (3.52)$$

Für eine komplexe Zahl oder Größe folgt damit:

$$\underline{z} = x + j \cdot y \quad \text{mit} \quad x = \operatorname{Re}\{\underline{z}\}, \quad y = \operatorname{Im}\{\underline{z}\}. \quad (3.53)$$

Abbildung 3.6 zeigt im ersten Quadranten die komplexe Größe \underline{z} in der komplexen Ebene. In Polarkoordinaten ergibt sich für \underline{z} :

$$x = |\underline{z}| \cdot \cos \varphi, \quad y = |\underline{z}| \cdot \sin \varphi, \quad \underline{z} = |\underline{z}| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \quad (3.54)$$

mit $|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (3.55)$

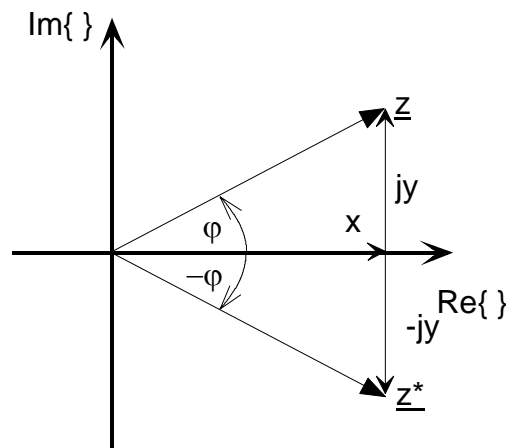


Abbildung 3.6: Komplexe und konjugiert komplexe Größe in der komplexen Ebene

Aus der Eulersche Formel

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi \quad (3.56)$$

folgt mit (3.54):

$$\underline{z} = |\underline{z}| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = |\underline{z}| \cdot e^{j \cdot \varphi}.$$

Die zu \underline{z} konjugiert komplexe Größe ist definiert mit:

$$\underline{z}^* = x - j \cdot y = |\underline{z}| \cdot (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi) = |\underline{z}| \cdot e^{-j\varphi} . \quad (3.57)$$

Sie ist in Abbildung 3.6 im 4. Quadranten dargestellt. Aus der Eulerschen Formel folgt:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}). \quad (3.58)$$

Damit ergeben sich für Real- und Imaginärteil von \underline{z} :

$$\operatorname{Re}\{\underline{z}\} = |\underline{z}| \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2}(\underline{z} + \underline{z}^*), \quad \operatorname{Im}\{\underline{z}\} = |\underline{z}| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2j}(\underline{z} - \underline{z}^*). \quad (3.59)$$

3.5.2 Abbildung einer harmonischen Zeitfunktion in einen komplexen Effektivwertzeiger

Harmonisch zeitabhängige Größen in einem elektrischen Netzwerk lassen sich eindeutig in komplexe Größen abbilden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Frequenz der Schwingungen konstant und einheitlich im gesamten Netzwerk ist:

$$\begin{aligned} u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u) &\Leftrightarrow \underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \\ i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_i) &\Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die komplexe Größe, auf die die harmonische Zeitfunktion abgebildet wird, enthält als Parameter den Nullphasenwinkel $\varphi_{u,i}$ und den Effektivwert U, I . Sie wird als **komplexer Effektivwertzeiger** bezeichnet. Da die Frequenz ω einheitlich im Netzwerk ist und bekannt ist, taucht sie nicht als Parameter auf. Mit der bekannten Frequenz ist auch die inverse Abbildung eindeutig.

Wird eine harmonisch zeitabhängige Größe differenziert, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)] &= -\sqrt{2} \cdot U \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u) \\ &= \sqrt{2} \cdot U \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die Abbildung in eine komplexe Größe nach (3.60) ergibt

$$\frac{d}{dt} [\sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)] \Leftrightarrow \omega \cdot U \cdot e^{j(\varphi_u + \frac{\pi}{2})} = j\omega \cdot U \cdot e^{j\varphi_u} = j\omega \cdot \underline{U} \quad (3.62)$$

Die Differentiation der Zeitfunktion entspricht demnach der Multiplikation der komplexen Größe mit dem Faktor $j\omega$.

3.6 Berechnung des eingeschwungenen Zustands linearer Netzwerke mit komplexen Effektivwertzeigern.

Wendet man Abbildung der harmonischen Zeitfunktionen in komplexe Effektivwertzeiger auf die Strom/Spannungsbeziehungen an Widerstand, Induktivität und Kapazität an, folgt:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \Leftrightarrow \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R \text{ bzw. } \underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R}, \quad (3.63)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{U}_L = j\omega \cdot L \cdot \underline{I}_L \text{ bzw. } \underline{I}_L = \frac{\underline{U}_L}{j\omega \cdot L}, \quad (3.64)$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{I}_C = j\omega \cdot C \cdot \underline{U}_C \text{ bzw. } \underline{U}_C = \frac{\underline{I}_C}{j\omega \cdot C}, \quad (3.65)$$

Die Beziehungen (3.63) bis (3.65) für die komplexen Größen entsprechen dem ohmschen Gesetz in einer verallgemeinerten Form:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \text{ bzw. } \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \quad (3.66)$$

mit

$$\underline{Z}_R = \frac{1}{\underline{Y}_R} = R, \quad (3.67)$$

$$\underline{Z}_L = \frac{1}{\underline{Y}_L} = j\omega L, \quad (3.68)$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\underline{Y}_C} = \frac{1}{j\omega C}. \quad (3.69)$$

\underline{Z} hat die Dimension eines Widerstands und wird als **komplexer Widerstand** oder kurz als **Impedanz** bezeichnet. Der Kehrwert \underline{Y} hat die Dimension eines Leitwerts und wird als **komplexer Leitwert** oder kurz als **Admittanz** bezeichnet.

Die Beziehungen gelten nur im eingeschwungenen Zustand eines linearen Netzwerks bei einheitlicher Frequenz aller Quellen, da sich nur in diesem Fall sämtliche Netzwerkgrößen als harmonische Zeitfunktionen mit einheitlicher Frequenz ergeben.

Mit (3.60) und (3.66) bis (3.69) gelten für Widerstand, Kapazität und Induktivität die Beziehungen:

$$\underline{U}_R = U_R \cdot e^{j\varphi_{UR}} = \underline{Z}_R \cdot \underline{I}_R = R \cdot I_R \cdot e^{j\varphi_{IR}}, \quad (3.70)$$

$$\underline{U}_L = U_L \cdot e^{j\varphi_{UL}} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = j\omega L \cdot I_L \cdot e^{j\varphi_{IL}} = I_L \cdot \omega L \cdot e^{j(\varphi_{IL} + \frac{\pi}{2})}, \quad (3.71)$$

$$\underline{U}_C = U_C \cdot e^{j\varphi_{UC}} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_C \cdot e^{j\varphi_{IC}} = I_C \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot e^{j(\varphi_{IC} - \frac{\pi}{2})}. \quad (3.72)$$

Am Widerstand haben Strom und Spannung den gleichen Nullphasenwinkel, sie **sind in Phase** ($\varphi_{UR} = \varphi_{IR}$). An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ oder um eine Viertelperiode voraus ($\varphi_{UL} = \varphi_{IL} + \frac{\pi}{2}$). Entsprechend eilt an der Kapazität der Strom der Span-

nung um eine Viertelperiode voraus ($\varphi_{IC} = \varphi_{UC} + \frac{\pi}{2}$). Diese Ergebnisse können anhand der harmonischen Zeitfunktionen leicht überprüft werden.

Am Beispiel aus Abbildung 3.4 soll die einfache Berechnung des eingeschwungenen Zustands mit den komplexen Zeigern gezeigt werden. Es ergab sich dabei die Differentialgleichung (3.37):

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_C = \frac{1}{\tau} \cdot u_q(t), \quad \tau = R \cdot C \quad (3.73)$$

mit
$$u_q(t) = \sqrt{2} \cdot U_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_q). \quad (3.74)$$

Durch Transformation der harmonischen Wechselgrößen in komplexe Zeiger folgt mit der Regel für die zeitliche Differentiation:

$$j\omega \cdot \underline{U}_C + \frac{1}{\tau} \cdot \underline{U}_C = \frac{1}{\tau} \underline{U}_q. \quad (3.75)$$

Damit ergibt sich als Lösung für den komplexen Spannungszeiger \underline{U}_C am Kondensator:

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{1}{\tau} \cdot \underline{U}_q}{j\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{\frac{1}{RC} \cdot \underline{U}_q}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{\underline{U}_q}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C}. \quad (3.76)$$

Gleichung (3.76) ergibt sich einfach aus dem Maschengleichung gemäß Abbildung 3.7, wenn jedes Element der Schaltung durch seine Impedanz (Admittanz) beschrieben wird. Statt der Lösung einer Differentialgleichung ist lediglich die Lösung einer algebraischen Gleichung mit komplexen Größen erforderlich.

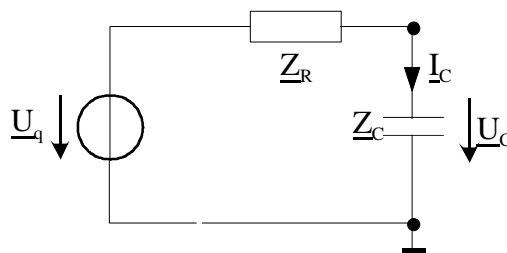


Abbildung 3.7: Komplexes Ersatzschaltbild des Beispiels

Nun ist noch zu zeigen, daß das mittels komplexer Effektivwertzeiger erzielte Ergebnis mit dem Ergebnis der Lösung der Differentialgleichung übereinstimmt. Aus (3.76) folgt mit

$$\frac{1}{\tau} + j \cdot \omega = \frac{1}{\tau} \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot \tau) = \frac{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}}{\tau} \cdot e^{j \cdot \arctan(\omega \cdot \tau)}; \quad (3.77)$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(\omega \cdot \tau)} \cdot \underline{U}_q, \quad (3.78)$$

$$\text{Mit} \quad \underline{U}_C = U_C \cdot e^{j\varphi_{uC}}, \quad U_C = \frac{U_q}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}} \quad (3.79)$$

$$\text{und} \quad \varphi_{uC} = \varphi_q - \arctan(\omega \cdot \tau). \quad (3.80)$$

ergibt sich durch Umkehrung der Transformation die zugehörige harmonische Zeitfunktion zu:

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{uC}). \quad (3.81)$$

Diese Zeitfunktion ist identisch mit dem eingeschwungenen Zustand (3.51), der sich aus der Lösung der Differentialgleichung ergab. Die Differentialgleichung wurde jedoch durch eine algebraische Gleichung ersetzt, die wesentlich einfacher zu lösen ist. Tatsächlich steckt die gesamte Lösungsinformation vollständig im komplexen Effektivwertzeiger \underline{U}_C :

$$\underline{U}_C = U_C \cdot e^{j\varphi_{uC}} \quad (3.82)$$

$$\text{mit} \quad U_C = \frac{U_q}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}}, \quad \varphi_{uC} = \varphi_q - \arctan(\omega \cdot \tau). \quad (3.83)$$

Das Rechnen mit komplexen Effektivwertzeigern führt offensichtlich zu sehr effizienten Lösungsverfahren für den eingeschwungenen Zustand linearer Wechselstromnetzwerke. Da die gesamte Lösungsinformation in den resultierenden komplexen Effektivwertzeigern enthalten ist, ist eine Umwandlung in harmonische Zeitfunktionen nicht erforderlich.

Die Verwendung komplexer Effektivwertzeiger mit den zugehörigen Transformationsvorschriften (3.84) macht zur Lösung des eingeschwungenen Zustands lediglich die Anwendung einfacher algebraischer Operationen erforderlich. Dies führt zur sog. **Operatorenrechnung**. Da die Effektivwertzeiger sämtliche Informationen der Lösung der Netzwerkgleichungen enthalten, wird lediglich in Ausnahmefällen der Übergang zur harmonischen Zeitfunktion erforderlich sein:

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot Z \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.84)$$

Üblicherweise wird in der Elektrotechnik in Effektivwertzeigern gerechnet und „gedacht“, ohne daß man sich der Mühe der Transformation in den Zeitbereich unterzieht. Den Bildbereich bezeichnet man auch als **Frequenzbereich**, weil die Frequenz ω dort der bestimmende Parameter ist.

3.6.1 Ströme und Spannungen an linearen Zweipolen im eingeschwungenen Zustand

Zur Verdeutlichung sollen noch einmal die Beziehungen zwischen Strom und Spannung im Zeitbereich und im komplexen Frequenzbereich an linearen Zweipolen untersucht werden.

Ohmscher Widerstand

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{1}{R} \cdot u_R(t) = G \cdot u_R(t) \quad \text{bzw.} \quad u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad (3.85)$$

$$\underline{I}_R = \frac{1}{R} \cdot \underline{U}_R = \underline{Y}_R \cdot \underline{U}_R \quad \text{bzw.} \quad \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R = \underline{Z}_R \cdot \underline{I}_R, \quad (3.86)$$

mit

$$\underline{Z}_R = R \text{ Impedanz des ohmschen Widerstandes,} \quad (3.87)$$

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G \text{ Admittanz des ohmschen Widerstandes.} \quad (3.88)$$

Admittanz und Impedanz des Ohmschen Widerstands sind reelle Größen. Abbildung 3.8 zeigt den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung im Zeigerdiagramm. Strom und Spannung am Widerstand sind in Phase ($\varphi_{uR} = \varphi_{iR}$).

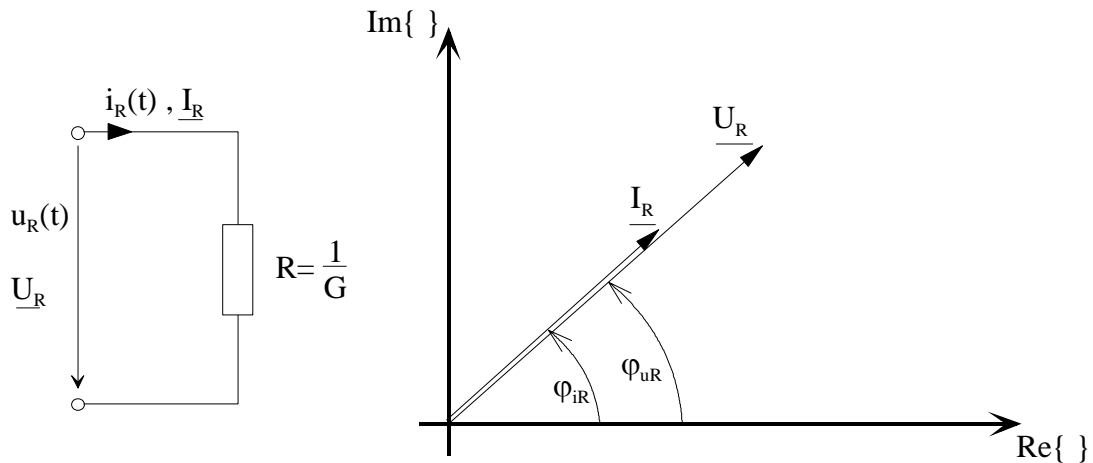


Abbildung 3.8: Ohmscher Widerstand mit Zeigerdiagramm

Induktivität:

Aus
$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad (3.89)$$

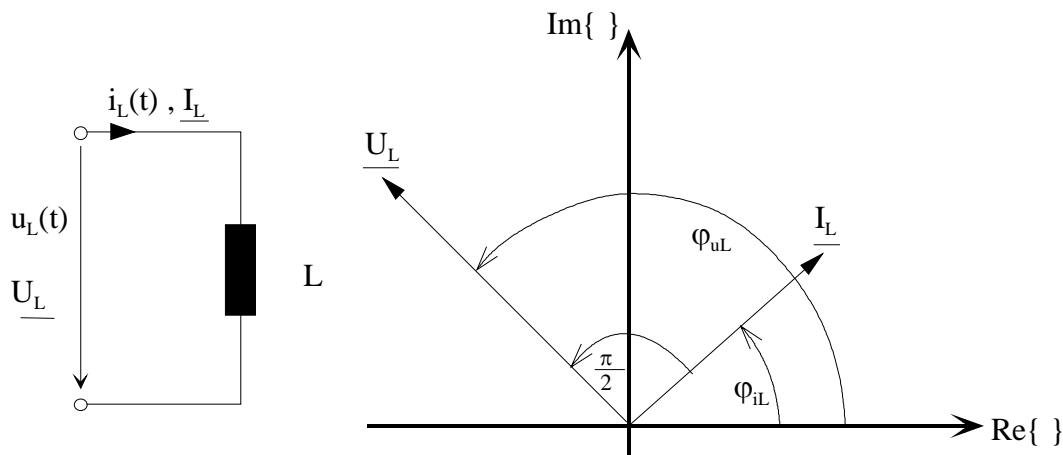
folgt
$$\underline{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_L. \quad (3.90)$$

Damit gilt

$$\underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = \frac{\underline{I}_L}{\underline{Y}_L} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I}_L = \underline{Y}_L \cdot \underline{U}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_L}, \quad (3.91)$$

mit
$$\underline{Z}_L = j\omega \cdot L = \omega \cdot L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ Impedanz der Induktivität,} \quad (3.92)$$

und
$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega \cdot L} = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ Admittanz der Induktivität.} \quad (3.93)$$


Abbildung 3.9: Induktivität mit Zeigerdiagramm

Die Beziehung (3.91) entspricht dem ohmschen Gesetz. Die **Impedanz** wird daher als **komplexer Widerstand**, die **Admittanz** wird entsprechend als **komplexer Leitwert** bezeichnet. Aus (3.92) und (3.93) folgt

$$\underline{U}_L = U_L \cdot e^{j\varphi_{uL}} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = |\underline{Z}_L| \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot |\underline{I}_L| \cdot e^{j\varphi_{iL}} = Z_L \cdot I_L \cdot e^{j(\varphi_{iL} + \frac{\pi}{2})} \quad (3.94)$$

und damit $\varphi_{uL} = \varphi_{iL} + \frac{\pi}{2}$. (3.95)

An der Induktivität eilt, so wie in Abbildung 3.9 dargestellt, die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ bzw. um 90° voraus.

Kapazität:

Aus $i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ (3.96)

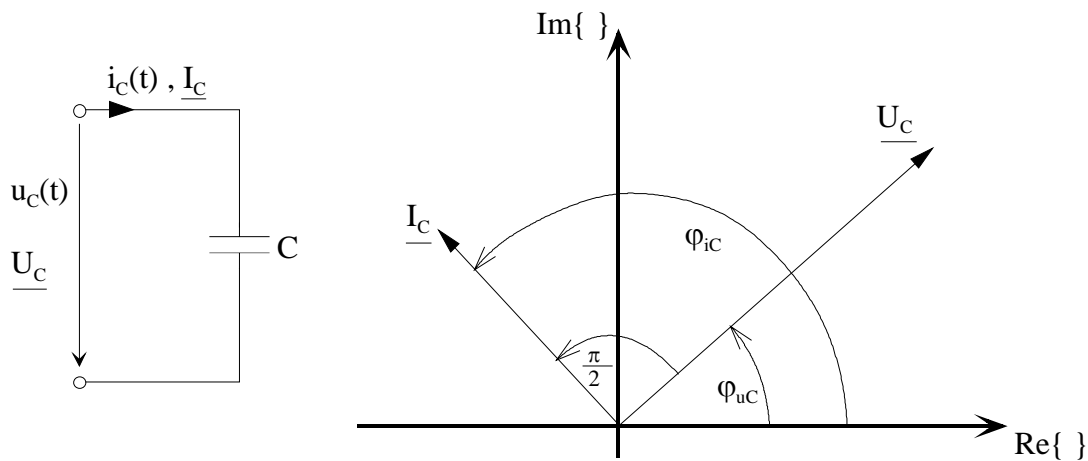
folgt $\underline{I}_C = j \cdot \omega \cdot C \cdot \underline{U}_C$. (3.97)

Damit gilt

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \cdot \underline{U}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} \quad \text{bzw.} \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_C, \quad (3.98)$$

mit $\underline{Y}_C = j \cdot \omega \cdot C = \omega \cdot C \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ Admittanz der Kapazität, (3.99)

und $\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$ Impedanz der Kapazität. (3.100)


Abbildung 3.10: Kapazität mit Zeigerdiagramm

Die Beziehung (3.98) entspricht dem ohmschen Gesetz. Die **Impedanz** wird daher als **komplexer Widerstand**, die **Admittanz** wird entsprechend als **komplexer Leitwert** bezeichnet. Aus (3.98) und (3.99) folgt

$$\underline{I}_C = I_C \cdot e^{j\varphi_{iC}} = \underline{Y}_C \cdot \underline{U}_C = |\underline{Y}_C| \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot |\underline{U}_C| \cdot e^{j\varphi_{uC}} = Y_C \cdot U_C \cdot e^{j(\varphi_{uC} + \frac{\pi}{2})} \quad (3.101)$$

und damit
$$\varphi_{iC} = \varphi_{uC} + \frac{\pi}{2}. \quad (3.102)$$

An der Kapazität eilt, so wie in Abbildung 3.10 dargestellt, der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ bzw. um 90° voraus.

3.6.2 Zusammengesetzte Zweipole

Abbildung 3.11 zeigt beispielhaft für einen zusammengesetzten Zweipol eine Serienschaltung eines Widerstandes, einer Induktivität und einer Kapazität.

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \cdot \underline{I} + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \frac{1}{\underline{Y}} \cdot \underline{I} \quad (3.103)$$

mit
$$\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \text{ Impedanz des Zweipols,} \quad (3.104)$$

und
$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \text{ Admittanz der Zweipols.} \quad (3.105)$$

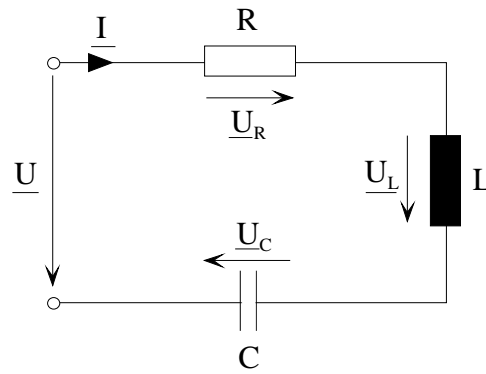


Abbildung 3.11: Zusammengesetzter Zweipol

Impedanz und Admittanz sind komplexe Größen, die nach Real- und Imaginärteil aufgeteilt werden können:

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX, \quad (3.106)$$

R - Wirkwiderstand oder **Resistanz**,

X - Blindwiderstand oder **Reaktanz**,

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB, \quad (3.107)$$

G - Wirkleitwert oder **Konduktanz**,

B - Blindleitwert oder **Suszeptanz**.

Gleichung (3.103) entspricht dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}. \quad (3.108)$$

In Polarform lauten (3.106) und (3.107):

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = Z \cdot e^{j\varphi_Z}, \quad (3.109)$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi_Z = \arctan \frac{X}{R}, \quad (3.110)$$

$$\underline{Y} = G + j \cdot B = Y \cdot e^{j\varphi_Y}, \quad (3.111)$$

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi_Y = \arctan \frac{B}{G}. \quad (3.112)$$

Für Serien- bzw. Parallelschaltung von Zweipolen gelten die entsprechenden Beziehungen wie im Gleichstromfall:

$$\text{Serienschaltung: } \underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i, \quad (3.113)$$

$$\text{Parallelschaltung: } \underline{Y} = \sum_i \underline{Y}_i. \quad (3.114)$$

3.7 Die Leistung im Wechselstromfall

Unter der Voraussetzung des eingeschwungenen Zustands ergibt sich für den linearen Zweipol in Abbildung 3.12 mit den harmonischen Wechselgrößen

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u), \quad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_i) \quad (3.115)$$

die Augenblicksleistung:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_i). \quad (3.116)$$

Mit $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ folgt daraus:

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) + U \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi_u + \varphi_i). \quad (3.117)$$

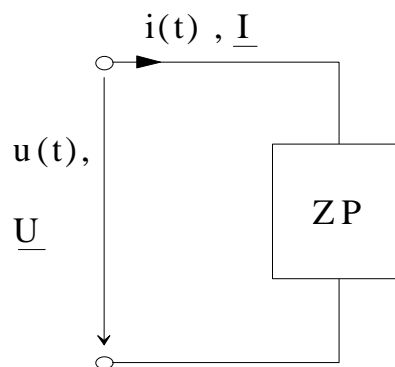


Abbildung 3.12: Linearer Zweipol

Mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} p(t) &= U \cdot I \cdot \cos \varphi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega \cdot t + \varphi + 2 \cdot \varphi_i) \\ &= U \cdot I \cdot \cos \varphi + U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot \cos(2\omega \cdot t + 2 \cdot \varphi_i) \\ &\quad - U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin(2\omega \cdot t + 2 \cdot \varphi_i) . \end{aligned} \quad (3.118)$$

Mit den Definitionen

$$S = U \cdot I, \quad P = S \cdot \cos \varphi, \quad Q = S \cdot \sin \varphi$$

folgt

$$p(t) = P [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi_i)] - Q \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi_i). \quad (3.119)$$

Der erste Term in (3.119) wird als **Wirkleistungsschwingung** (s. Abbildung 3.13) bezeichnet. Der Mittelwert der Wirkleistungsschwingung ergibt sich zu

$$\frac{P}{T} \int_0^T [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \varphi_i)] \cdot dt = P. \quad (3.120)$$

Die Wirkleistungsschwingung liefert demnach im zeitlichen Mittel die Leistung P. Der zeitliche Mittelwert des zweiten Terms, der **Blindleistungsschwingung** verschwindet im Gegensatz dazu:

$$\frac{Q}{T} \int_0^T \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2\varphi_i) \cdot dt = 0. \quad (3.121)$$

Eine positive Amplitude der Blindleistungsschwingung in Abbildung 3.13 bedeutet, daß der Zweipol z.Zt. Augenblicksleistung aufnimmt. Während der negativen Amplitude wird die in der vorigen Halbperiode aufgenommene Blindleistung wieder an den Erzeuger abgegeben. Die Blindleistungsschwingung pendelt also zwischen Erzeuger und Zweipol hin und her. Die Frequenz von Wirk- und Blindleistungsschwingung entspricht der doppelten Frequenz der Wechselspannung bzw. des Wechselstroms.

Damit ergibt sich für den zeitlichen Mittelwert von $p(t)$:

$$\overline{p(t)} = P = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \quad (3.122)$$

P ist die am Zweipol wirksame elektrische Leistung, die als **Wirkleistung** bezeichnet wird. Für $\Delta t \gg T$ ergibt sich daraus die am Zweipol im Zeitintervall Δt umgesetzte Arbeit:

$$W = P \cdot \Delta t. \quad (3.123)$$

Der Faktor $\cos \varphi$ wird als **Wirkleistungsfaktor** bezeichnet. Das Produkt $U \cdot I$ ist, da in elektrischen Netzen der Effektivwert der Spannung konstant gehalten wird, ein Maßstab für den Effektivwert des vom Zweipol benötigten Stromes. Das Produkt wird als **Scheinleistung**

$$S = U \cdot I \quad (3.124)$$

bezeichnet. Für die Wirkleistung folgt damit:

$$P = S \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \quad (3.125)$$

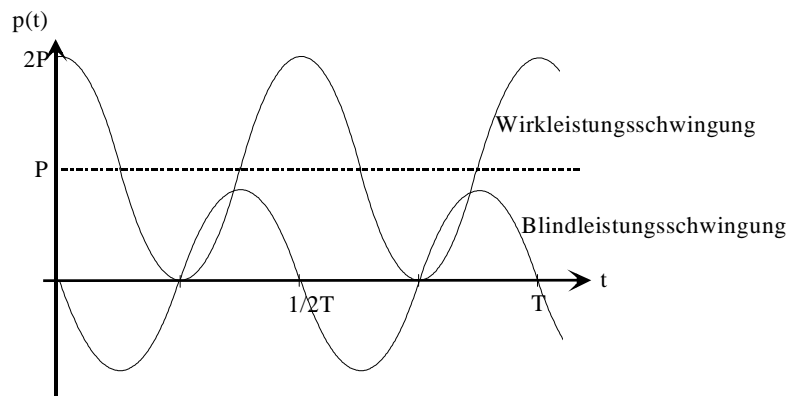


Abbildung 3.13: Augenblicksleistung als Summe von Wirk- und Blindleistungsschwingung

Die Blindleistungsschwingung (vgl. Abbildung 3.13) ergibt keine elektrische Arbeit. Aus ihr resultiert allerdings ein Stromfluß über das elektrische Netz und sie führt damit zu einer Verlustleistung auf den Leitungen. Großverbrauchern elektrischer Energie wird daher die **Blindleistung**

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = S \cdot \sin \varphi \quad (3.126)$$

bzw. der „Verbrauch“ an Blindleistung von den Energieversorgungsunternehmen (EVU) in Rechnung gestellt, wenn diese ein bestimmtes Maß überschreitet. In diesem Fall werden Maßnahmen zur **Blindleistungskompensation** unternommen.

Im folgenden sind die für die Bestimmung der Wechselstromleistung wesentlichen Größen zusammengefaßt. Zur Unterscheidung werden die Einheiten der Leistungsgrößen unterschiedlich benannt, obwohl ihre Dimension identisch ist.

$$\text{Scheinleistung:} \quad S = U \cdot I, \quad [S] = 1 \text{ VA (Volt-Ampere)}, \quad (3.127)$$

$$\text{Wirkleistung:} \quad P = S \cdot \cos \varphi, \quad [P] = 1 \text{ W (Watt)}, \quad (3.128)$$

$$\text{Blindleistung:} \quad Q = S \cdot \sin \varphi, \quad [Q] = 1 \text{ var (Volt-Ampere-reaktiv)}, \quad (3.129)$$

$$\text{Wirkleistungsfaktor:} \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}, \quad [\cos \varphi] = 1, \quad (3.130)$$

Für die Zweipole Ohmscher Widerstand, Induktivität und Kapazität sollen exemplarisch die Leistungsgrößen bestimmt werden.

Beim Ohmscher Widerstand sind Spannung und Strom in Phase. Es gilt damit:

$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0, \quad \cos \varphi_R = 1, \quad \sin \varphi_R = 0, \quad (3.131)$$

$$P_R = U \cdot I, \quad Q_R = 0. \quad (3.132)$$

Der Ohmsche Widerstand verbraucht reine Wirkleistung. Die Blindleistung ist gleich Null.

Bei der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um 90° voraus. Damit gilt:

$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi_L = 0, \quad \sin \varphi_L = 1, \quad (3.133)$$

$$P_L = S \cdot \cos \varphi_L = 0, \quad Q_L = S \cdot \sin \varphi_L > 0. \quad (3.134)$$

Die Induktivität verbraucht demnach keine Wirkleistung. Sie nimmt positive Blindleistung auf. Man sagt, daß sie **induktive Blindleistung** aufnimmt oder entsprechend, **kapazitive Blindleistung** abgibt.

Bei der Kapazität eilt der Strom der Spannung um 90° voraus. Es gilt demnach:

$$\varphi_C = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi_C = 0, \quad \sin \varphi_C = -1, \quad (3.135)$$

$$P_C = S \cdot \cos \varphi_C = 0, \quad Q_C = S \cdot \sin \varphi_C < 0. \quad (3.136)$$

Die Kapazität verbraucht wie die Induktivität keine Wirkleistung. Sie nimmt negative Blindleistung auf. Man sagt, daß sie **kapazitive Blindleistung** aufnimmt oder entsprechend, **induktive Blindleistung** abgibt.

3.7.1 Komplexe Leistung

Mit den Definitionen von Scheinleistung $S = U \cdot I$, Wirkleistung $P = S \cdot \cos \varphi$ und Blindleistung $Q = S \cdot \sin \varphi$, liegt die Definition der komplexen Leistung nahe:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= P + j \cdot Q = S \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} \\ &= U \cdot I \cdot e^{j\varphi_u - \varphi_i} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*.\end{aligned}\quad (3.137)$$

Daraus folgt für Wirk- und Blindleistung:

$$P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\} = \frac{1}{2}(\underline{S} + \underline{S}^*) = \frac{1}{2}(\underline{U} \cdot \underline{I}^* + \underline{U}^* \cdot \underline{I}), \quad (3.138)$$

$$Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\} = \frac{1}{2j}(\underline{S} - \underline{S}^*) = \frac{1}{2j}(\underline{U} \cdot \underline{I}^* - \underline{U}^* \cdot \underline{I}). \quad (3.139)$$

Am Beispiel eines Zweipol mit $\underline{Z} = R + j \cdot X$ soll die Berechnung von Wirk- und Blindleistung mit Hilfe der komplexen Leistung gezeigt werden. Für den Strom des Zweipols ergibt sich:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j \cdot X}. \quad (3.140)$$

Mit der konjugiert komplexen Erweiterung folgt:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j \cdot X} \cdot \frac{R - j \cdot X}{R - j \cdot X} = \frac{\underline{U} \cdot (R - j \cdot X)}{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*} = \frac{\underline{U} \cdot (R - j \cdot X)}{|\underline{Z}|^2}. \quad (3.141)$$

Aus (3.138) folgt dann für die Wirkleistung:

$$P = \frac{1}{2}(\underline{U} \cdot \underline{I}^* + \underline{U}^* \cdot \underline{I}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\underline{U} \cdot \underline{U}^* \cdot (R - j \cdot X)^*}{Z^2} + \frac{\underline{U}^* \cdot \underline{U} \cdot (R - j \cdot X)}{Z^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{U^2}{Z^2} \cdot 2 \cdot R, \quad (3.142)$$

$$P = R \cdot I^2. \quad (3.143)$$

Die Wirkleistung ergibt sich demnach als Produkt des Wirkwiderstandes (Resistanz) des Zweipols mit dem Quadrat des Effektivwerts des Stromes. Dies entspricht der Leistung im Gleichstromfall, wobei der Effektivwert des Stromes dem Gleichstrom entspricht.

Für die Blindleistung folgt aus (3.139):

$$Q = \frac{1}{2j}(\underline{U} \cdot \underline{I}^* - \underline{U}^* \cdot \underline{I}) = \frac{1}{2j} \frac{U^2}{Z^2} \cdot 2 \cdot j \cdot X = X \cdot I^2. \quad (3.144)$$

Die Blindleistung ergibt sich demnach als Produkt des Blindwiderstandes (der Reaktanz) X des Zweipols mit dem Quadrat des Effektivwerts des Stromes.

3.7.2 Leistungsmessung

In Kapitel 1.3.4 ergab sich für das Drehmoment des Drehspulinstruments:

$$M_D = n \cdot I \cdot A \cdot B = k \cdot I \cdot B. \quad (3.145)$$

Statt eines Permanentmagneten kann eine Feldspule zur Erregung des Magnetfelds B verwendet werden. Entsprechend Abbildung 3.14 wird der Strom der Feldspule i_F zur Strommessung an einem Zweipol und der Strom der Drehspule i_D zur Spannungsmessung benutzt. Dann gilt für das erzeugte Drehmoment:

$$\begin{aligned} m_D(t) &= k \cdot u(t) \cdot i(t) = k \cdot \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_i) \\ &= k \cdot U \cdot I \cdot [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi_u + \varphi_i)] . \end{aligned} \quad (3.146)$$

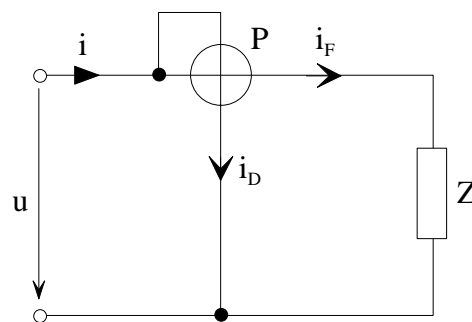


Abbildung 3.14: Drehspulinstrument zur Leistungsmessung

Als Gleichwert des Drehmoments ergibt sich

$$\bar{m}_D = k \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = k \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi \sim P. \quad (3.147)$$

d.h. das Drehmoment und damit der Zeigerausschlag sind proportional zur vom Zweipol aufgenommenen Wirkleistung.

3.7.3 Leistungsanpassung

In der elektrischen Energietechnik ist das Bestreben, dem Verbraucher eine hinreichend konstante Netzspannung bei weitgehend beliebiger aufgenommener Scheinleistung zu bieten. Daraus resultiert die Forderung, die Spannungsverluste auf dem Netz durch eine hinreichend niedrige Netzimpedanz zu minimieren ($Z_{Netz} \rightarrow 0$).

In der Nachrichtentechnik werden in der Regel sehr geringe Leistungen übertragen. Daher wird, im Gegensatz zur Energietechnik, eine maximale Wirkleistung am Verbraucher angestrebt. In Abbildung 3.15 ist ein einfaches Modell eines nachrichtentechnischen Systems dargestellt. Sender und Übertragungsweg werden durch eine Quelle mit Impedanz beschrieben. Der Empfänger wird durch seine Impedanz charakterisiert. Für den Verbraucherstrom ergibt sich:

$$\underline{I}_v = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_v}. \quad (3.148)$$

$$P_v = I_v^2 \cdot R_v = \frac{U^2}{Z^2} \cdot R = \frac{U^2}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_v|^2} \cdot R = \frac{U^2 \cdot R_v}{(R_i + R_v)^2 + (X_i + X_v)^2}. \quad (3.149)$$

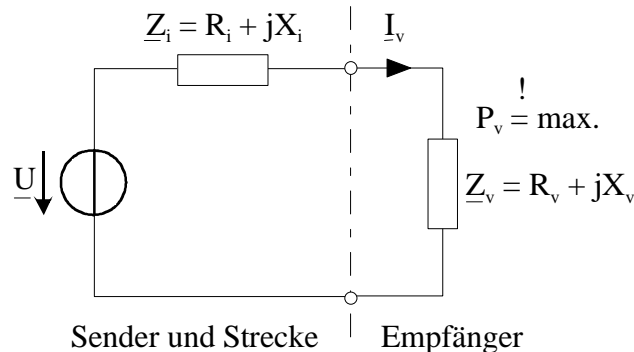


Abbildung 3.15: Modell eines nachrichtentechnischen Systems

Variiert man die Reaktanzen in (3.149), wird P_v für $X_v = -X_i$ maximal. Damit ergibt sich:

$$P_v(X_i = -X_v) = \frac{U^2 \cdot R_v}{(R_i + R_v)^2}. \quad (3.150)$$

(3.150) entspricht der Leistung im Gleichstromfall. Für diese ergab sich das Maximum bei Leistungsanpassung, d.h. für $R_i = R_v$. Im Wechselstromfall ergibt sich demnach die maximale Wirkleistung am Empfänger für

$$\begin{aligned} \underline{Z}_v &= R_v + j \cdot X_v = R_i - j \cdot X_i = \underline{Z}_i^*, \\ \underline{Z}_v &= \underline{Z}_i^*. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Für Leistungsanpassung wird also gefordert, daß die Empfängerimpedanz gleich der konjugiert komplexen Impedanz der Übertragungsstrecke ist. Da die Reaktanz X frequenzabhängig ist, gilt die Anpassung nur für eine Frequenz.

3.7.4 Blindleistungskompensation

Verbraucher in der elektrischen Energietechnik wirken in der Regel induktiv, d.h. sie nehmen induktive Blindleistung auf:

$$\underline{S}_v = P_v + j \cdot Q_v, \quad Q_v > 0. \quad (3.152)$$

Abbildung 3.16 zeigt ein einfaches Modell einer Energieübertragungsstrecke. Durch Regelung der Transformatoren im Netz wird die Spannung beim Verbraucher näherungsweise konstant gehalten:

$$\underline{U}_v = U_v \cdot e^{j0} = U_v. \quad (3.153)$$

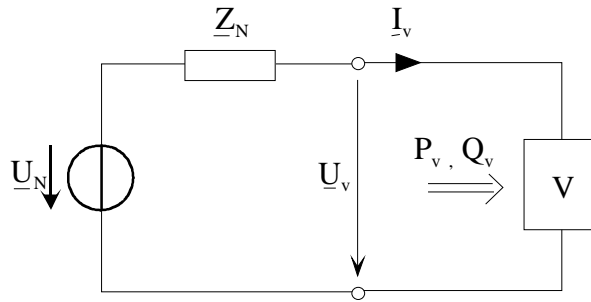


Abbildung 3.16: Einfaches Modell einer Energieübertragungsstrecke

Komplexe Leistung sowie Wirk- und Blindleistung am Verbraucher ergeben:

$$\underline{S}_v = \underline{U}_v \cdot \underline{I}_v^* = U_v \cdot (\text{Re}\{\underline{I}_v\} - j \cdot \text{Im}\{\underline{I}_v\}) = P_v + j \cdot Q_v. \quad (3.154)$$

Der Realteil des Verbraucherstromes wird als **Wirkstrom** bezeichnet. Dieser ergibt die Wirkleistung:

$$I_w = \text{Re}\{\underline{I}_v\} = \frac{P_v}{U_v}. \quad (3.155)$$

Der Imaginärteil des Verbraucherstroms, der **Blindstrom**, ergibt die Blindleistung:

$$I_B = \text{Im}\{\underline{I}_v\} = -\frac{Q_v}{U_v}. \quad (3.156)$$

$$\underline{I}_v = I_w + j \cdot I_B. \quad (3.157)$$

Der Wirkstrom ist vorgegeben durch die vom Verbraucher benötigte Wirkleistung. Der Blindstrom ist konstruktiv bedingt und kann durch Schaltungsmaßnahmen beeinflusst werden. Für die Verluste im Netz ergibt sich gemäß Abbildung 3.16:

$$P_N = I_N^2 \cdot R_N = I_v^2 \cdot R_N = (I_w^2 + I_B^2) \cdot R_N. \quad (3.158)$$

Zur Minimierung der Verluste auf dem Netz ist daher der Blindstrom zu minimieren. Wird parallel zum Verbraucher ein Zweipol geschaltet, der Blindleistung mit entgegengesetztem Vorzeichen aufnimmt, kann die Blindleistung des Verbrauchers kompensiert werden. Dies ergibt eine Reduzierung der Netzverluste. Abbildung 3.17 zeigt, wie durch Beschaltung eines induktiven Verbrauchers mit einer Kapazität, die aus dem Netz aufgenommene Blindleistung reduziert wird.

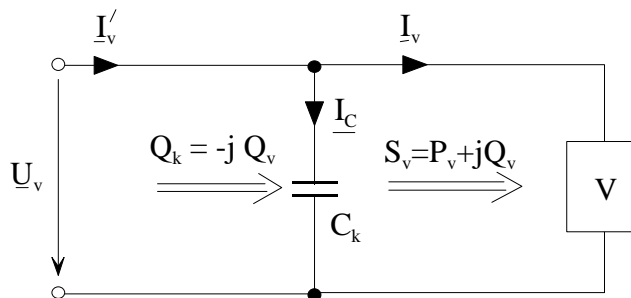


Abbildung 3.17: Kompensation der Verbraucherblindleistung

Die zur vollständigen Kompensation der Blindleistung des Verbrauchers erforderliche Kompensationskapazität ergibt sich mit

$$Q_k + Q_v = 0 \quad (3.159)$$

und
$$Q_k = U_v \cdot I_C^* = U_v \cdot (j \cdot \omega \cdot C_k \cdot U_v)^* = -j \cdot U_v^2 \cdot \omega \cdot C_k, \quad (3.160)$$

$$C_k = \frac{Q_v}{\omega \cdot U_v^2}. \quad (3.161)$$

Üblicherweise wird keine vollständige Kompensation der Blindleistung angestrebt, da sich diese, je nach Art und Anzahl eingeschalteter Verbraucher, verändert. Energieversorgungsunternehmen (EVU) berechnen Blindleistung nur, wenn sie die Wirkleistung um mehr als 50% übersteigt. Daraus resultiert die Forderung

$$\frac{Q}{P} = \frac{S \cdot \sin \varphi_k}{S \cdot \cos \varphi_k} = \tan \varphi_k < 0,5, \quad (3.162)$$

die durch entsprechende Kompensationsmaßnahmen erfüllt werden muß. In der Regel wird eine Kompensation auf

$$\cos \varphi_k > 0,95 \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi_k < 0,33 \quad (3.163)$$

angestrebt.

Bei Beschaltung eines induktiven Verbrauchers mit einer Kompensationskapazität, pendelt die Blindleistungsschwingung zwischen Kompensationskapazität und Verbraucher und belastet demnach das Netz nicht. Die Kapazität nimmt Augenblicksleistung auf, wenn der Verbraucher Augenblicksleistung abgibt und umgekehrt. Die reaktiven Augenblicksleistungen tauschen sich also aus. Dies entspricht dem Prinzip der Parallelresonanz, auf die im folgenden Kapitel eingegangen werden soll.

Alternativ zu einer Kompensationskapazität kann eine **übererregte Synchronmaschine** eingesetzt werden, deren Blindleistung durch die Erregung an den Bedarf der Kompensation angepaßt werden kann.

Im folgenden Beispiel soll ein Verbraucher an einer Nennspannung $U_N = 10 \text{ kV}$ mit einer Wirkleistungsaufnahme $P_v = 1 \text{ MW}$ und einem Leistungsfaktor $\cos \varphi_v = 0,86$ kompensiert werden. Die Blindleistung ergibt sich mit

$$Q_v = S_v \cdot \sin \varphi_v = P_v \cdot \frac{\sin \varphi_v}{\cos \varphi_v} = P_v \cdot \tan \varphi_v = 0,59 \text{ Mvar}. \quad (3.164)$$

Zur vollständige Kompensation ist eine Kapazität

$$C = \frac{Q_v}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_N^2} = \frac{0,59 \cdot 10^6 \text{ VA}}{2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 10^8 \text{ V}^2} = 18,8 \mu\text{F} \quad (3.165)$$

erforderlich. Bei einer Kompensation auf $\cos \varphi_k = 0,95$ verbleibt eine Blindleistung von

$$Q_{vk} = P_v \cdot \tan \varphi_k = 0,33 \text{ Mvar}. \quad (3.166)$$

Die Kompensationskapazität muß daher eine Blindleistung

$$Q_c = Q_{vk} - Q_v = -0,26 \text{ Mvar} \quad (3.167)$$

aufnehmen. Das reduziert die Kompensationskapazität auf

$$C = \frac{|Q_C|}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_N^2} = 8,3 \mu F \quad (3.168)$$

Wegen $C \sim \frac{1}{U_N^2}$ ist die Kompensation auf der Hochspannungsseite des vorgelagerten Transformators günstiger.

4 Wechselstromnetzwerke

4.1 Tiefpaß, Hochpaß

Tiefpaß und Hochpaß sind einfache Filterschaltungen, die bevorzugt Signale niedriger Frequenz (Tiefpaß) oder Signale hoher Frequenz (Hochpaß) übertragen. Da derartige Filterschaltungen über 2 Eingangsklemmen und zwei Ausgangsklemmen (s. Abbildung 4.1) verfügen, spricht man auch von **Vierpolen**, oder, wenn man die beiden jeweiligen Klemmenpaare als „Signaltore“ betrachtet, von **Zweitoren**.



Abbildung 4.1: Vierpol oder Zweitor

Ohne daß auf die Theorie der Vierpole oder Zweitore eingegangen werden soll, wird im folgenden lediglich das Übertragungsverhalten der Spannungen beim unbelasteten Vierpol untersucht werden. Ein- und Ausgangsspannung sind komplexe Größen. Demnach wird das Verhältnis der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung eine komplexe Funktion der Frequenz sein:

$$\underline{A}(j\omega) = A_r(j\omega) + jA_i(j\omega) = A(j\omega) \cdot e^{j\varphi_A(j\omega)} = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}. \quad (4.1)$$

$\underline{A}(j\omega)$ wird als **komplexe Übertragungsfunktion** bezeichnet. $A(j\omega)$ ist die Betrags-, $\varphi_A(j\omega)$ die Phasenfunktion der Übertragungsfunktion. Da sich die Betragsfunktion in der Regel über mehrere Größenordnungen verändert, wird oft ein logarithmischer Maßstab verwendet. Als logarithmische Einheit hat sich das **Dezibel** bewährt. Das Verhältnismaß in dB erhält man gemäß Definition zu:

$$A(\text{dB}) = 20 \cdot \log(A). \quad (4.2)$$

3 dB entspricht damit einem Verhältnis von $10^{\frac{3}{20}} = 1,412 \approx \sqrt{2}$.

4.1.1 Tiefpaß

Abbildung 4.2 zeigt zwei mögliche Realisierungen eines einfachen Tiefpasses. In beiden Fällen können die Anordnungen als Spannungsteiler betrachtet werden. Im Fall der Realisierung mit der Kapazität fällt mit zunehmender Frequenz ein zunehmender Anteil der Spannung \underline{U}_1 am Widerstand R ab, da die Impedanz der Kapazität $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ abnimmt. Dadurch wird \underline{U}_2 verringert. Entsprechend erhöht sich der Spannungsabfall an der Induktivität mit zunehmender Frequenz, da die Impedanz der Induktivität mit $\underline{Z}_L = j\omega L$ zunimmt, und \underline{U}_2 verringert sich.

Für den Strom I ergibt sich bei der Realisierung mit der Kapazität:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (4.3)$$

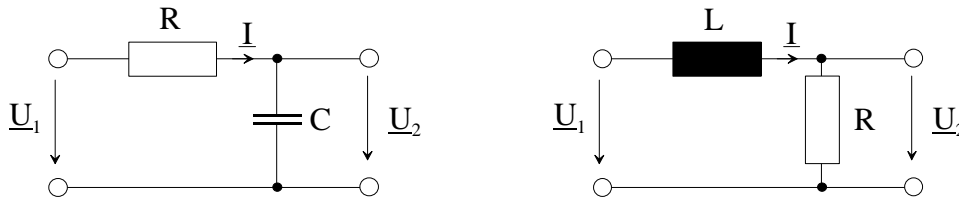


Abbildung 4.2: Tiefpaß

Daraus folgt für die Ausgangsspannung \underline{U}_2 :

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\underline{U}_1}{1 + j\omega RC}. \quad (4.4)$$

Entsprechend ergibt sich für den Fall der Realisierung mit einer Induktivität:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{R + j\omega L} \cdot R = \frac{\underline{U}_1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}. \quad (4.5)$$

Sowohl der Faktor $\frac{1}{RC}$ in (4.3) als auch der Faktor $\frac{R}{L}$ in (4.5) haben die Dimension einer Frequenz. Mit

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}. \quad (4.6)$$

werden die Gleichungen (4.3) und (4.5) identisch:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{j \frac{\omega}{\omega_g} + 1}. \quad (4.7)$$

Für die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{A}(j\omega)$ folgt:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}. \quad (4.8)$$

Für niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_g$ ist $\underline{A}(j\omega) = 1$, d.h. die Ausgangsspannung ist gleich der Eingangsspannung. Für hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_g$ gilt

$$\underline{A}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}} = -j \frac{\omega_g}{\omega}, \quad (4.9)$$

d.h. die Ausgangsspannung nimmt mit $\frac{1}{\omega}$ ab. Für $\omega = \omega_g$ gilt für die Betragsfunktion:

$$\left| \underline{A}(j\omega_g) \right| = A(\omega) = \frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega_g}{\omega_g} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.10)$$

Die Ausgangsspannung wird gegenüber dem niederfrequenten Fall um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gedämpft. Im logarithmischen Maßstab entspricht dies einer Dämpfung von $20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dB} = -3 \text{ dB}$. Die Frequenz ω_g wird daher auch als **3dB-Grenzfrequenz** bezeichnet. Für hohe Frequenzen gilt für die Betragsfunktion:

$$\left| \underline{A}(\omega \gg \omega_g) \right| = \frac{\omega_g}{\omega}. \quad (4.11)$$

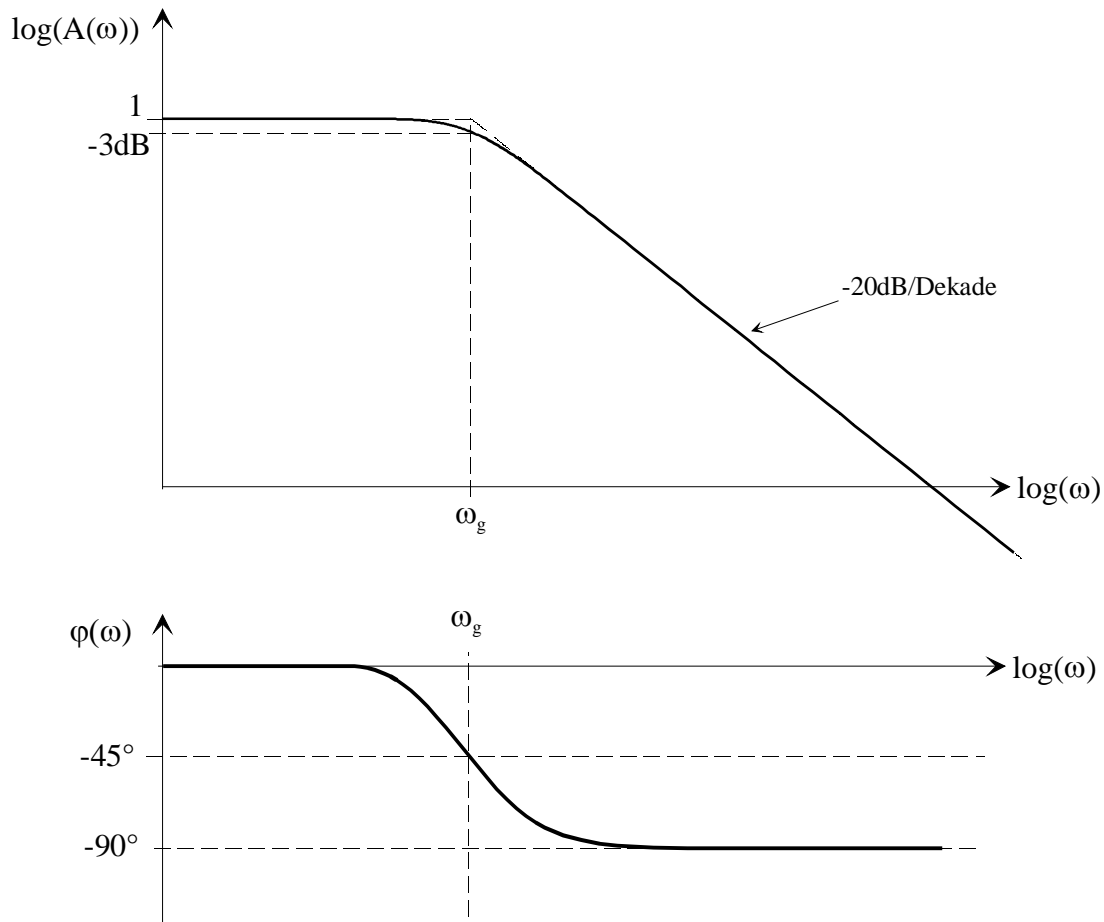


Abbildung 4.3: Bode-Diagramm des Tiefpasses

Bei einer Zunahme der Frequenz um eine **Dekade** (Faktor 10), nimmt die Betragsfunktion um den Faktor 0,1 entsprechend $20 \cdot \log(0,1) \text{ dB} = -20 \text{ dB}$ ab. Dies entspricht bei einer **Oktave** (Faktor 2) einer Dämpfung von -6 dB . Abbildung 4.3 zeigt im oberen Teil den Betrag der Übertragungsfunktion in doppelt logarithmischer Darstellung. Der Verlauf kann, mit hinreichender Genauigkeit durch zwei Geraden approximiert werden. Für $\omega < \omega_g$ ist der Betrag näherungsweise gleich 1. Für $\omega > \omega_g$ nimmt der Betrag in doppelt logarithmischer Darstellung linear mit der Steigung -20 dB/Dekade ab. Bei der Grenzfrequenz ergibt sich eine Dämpfung von -3 dB . Im sog. **Bode-Diagramm** wird die Darstellung der Betragsfunktion durch die einfach logarithmische Darstellung der Phasenfunktion ergänzt (s. unterer Teil der Abbildung 4.3). Für $\omega \ll \omega_g$ ist die Phase gleich 0, d.h. Aus- und Eingangsspannung sind in Phase. Mit zunehmender Frequenz eilt die Ausgangsspannung der Eingangsspannung nach. Bei der Grenzfrequenz beträgt die Phasenverschiebung zwischen Aus- und Eingangsspannung -45° und nimmt mit zunehmender Frequenz auf -90° zu.

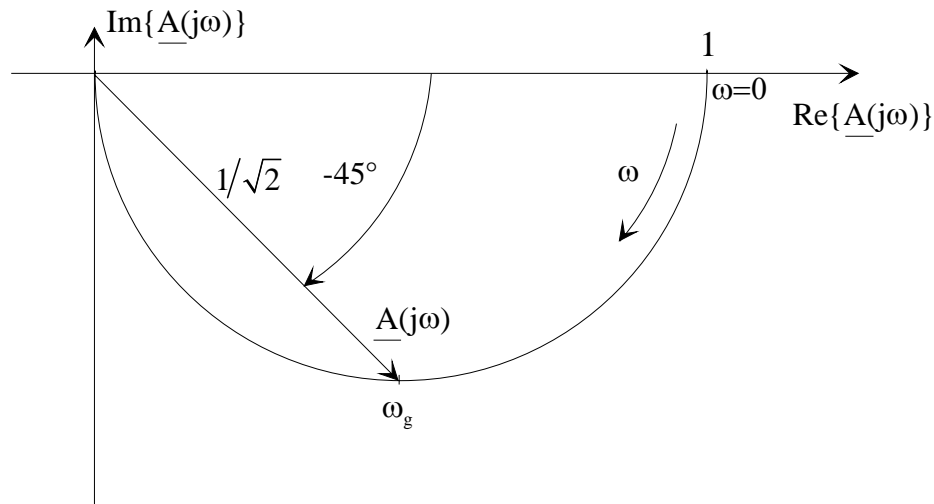


Abbildung 4.4: Ortskurve der Übertragungsfunktion des Tiefpasses

Abbildung 4.4 zeigt eine alternative graphische Darstellung der Übertragungsfunktion als **Ortskurve**. Dabei wird der komplexe Zeiger der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene mit der Kreisfrequenz als Parameter dargestellt. Im Fall des Tiefpasses beschreibt die Spitze des komplexen Zeigers einen Halbkreis in der komplexen Ebene. Für $\omega = 0$ ist der Zeiger reell und hat den Betrag 1. Mit zunehmender Frequenz wird die Phase negativ und der Betrag nimmt ab. Im Grenzfall $\omega \rightarrow \infty$ verschwindet der Betrag und die Phase strebt gegen -90° . Der Zeiger für die Grenzfrequenz ist eingezeichnet. Hier ist die Phase gerade -45° und der Betrag ist $1/\sqrt{2}$.

Als Beispiel zeigt Abbildung 4.5 eine Situation, wie sie bei einer Gleichrichterschaltung näherungsweise auftritt. Die Spannung $u_1(t)$ hat einen Gleichwert von 10V dem eine Wechselspannung mit einer Amplitude von 3V und einer Frequenz von 100Hz überlagert ist. Bei Anwendung eines Tiefpasses mit einer Grenzfrequenz von 10 Hz verbleibt in $u_2(t)$ ein Wechselspannungsanteil von etwa 0,3V der um nahezu -84° gegenüber dem Wechselspannungsanteil von $u_1(t)$ verschoben ist. Der Tiefpaß entfernt demnach die der Gleichspannung überlagerte „Brummspannung“.

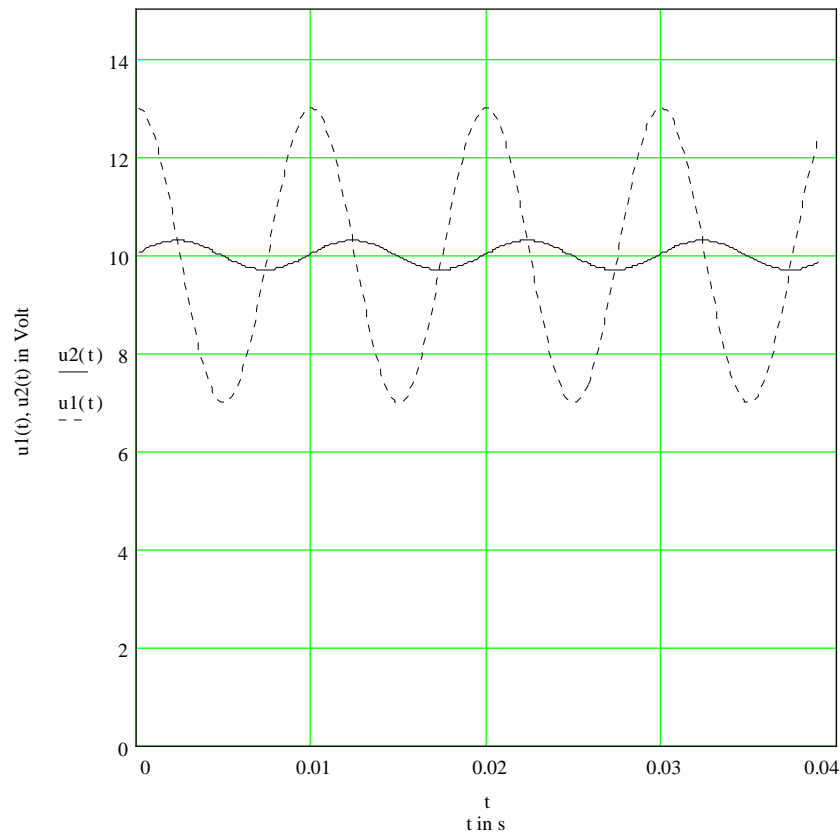


Abbildung 4.5: Beispiel für Tiefpaß

4.1.2 Hochpaß

Werden beim Tiefpaß die Positionen von Reaktanz und Ohmschem Widerstand ausgetauscht, entsteht ein Hochpaß (s. Abbildung 4.6).

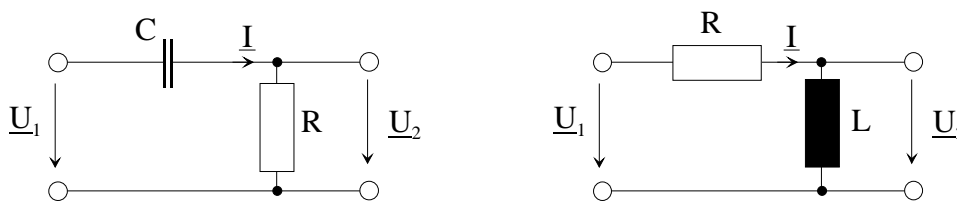


Abbildung 4.6: Hochpaß

Es ist leicht nachzuvollziehen, daß sich für \underline{U}_2 ergibt:

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot R = \frac{\underline{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot R = \frac{\underline{U}_1}{1 - \frac{j}{\omega RC}}, \tag{4.12}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{R + j\omega L} \cdot j\omega L = \frac{\underline{U}_1}{1 - j \frac{R}{\omega L}} \quad (4.13)$$

Mit

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L} \quad (4.14)$$

ergibt sich für beide Fälle die identische Übertragungsfunktion:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_g}{\omega}} \quad (4.15)$$

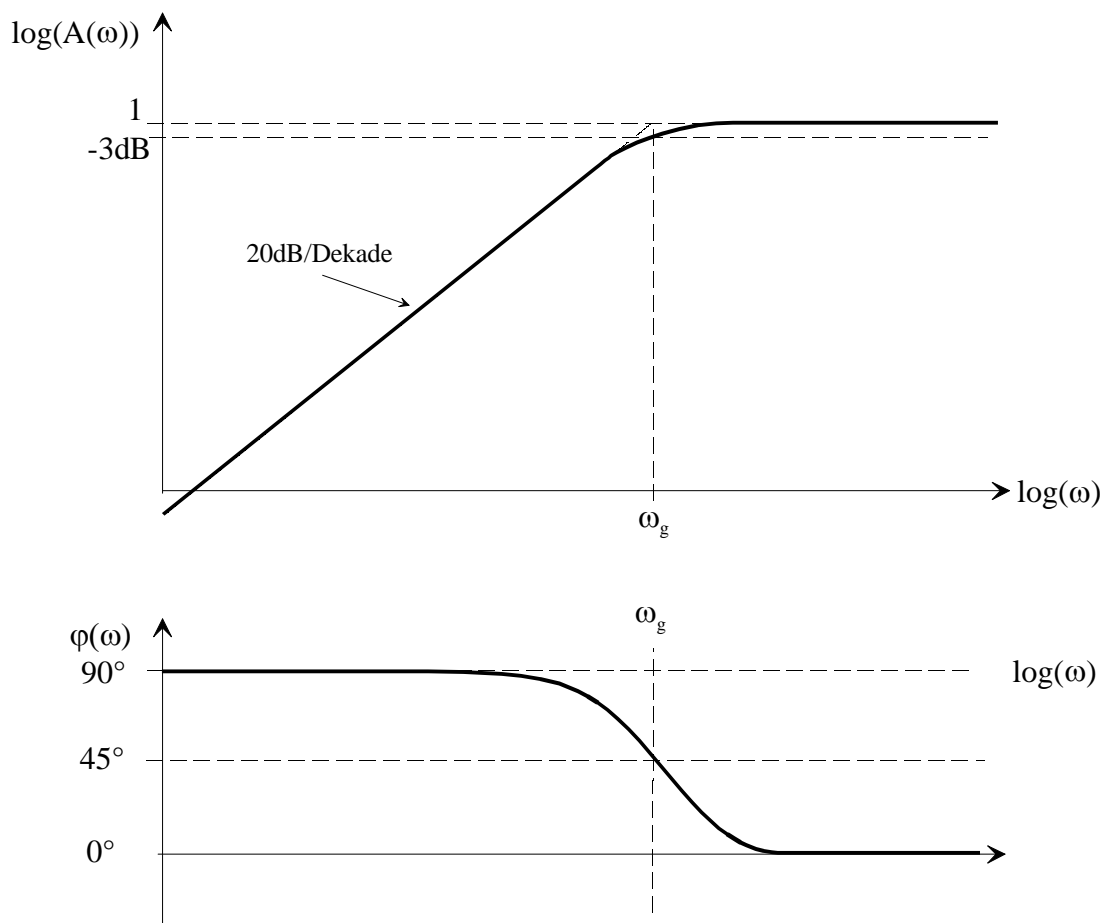


Abbildung 4.7: Bode-Diagramm des Hochpasses

Abbildung 4.7 zeigt das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion des Hochpasses. Die Betragsfunktion verschwindet für niedrige Frequenzen und erreicht für hohe Frequenzen den Wert 1. Die Phase ist für niedrige Frequenzen 90° und wird für hohe Frequenzen zu Null. Bei der Grenzfrequenz beträgt die Dämpfung gegenüber hohen Frequenzen -3 dB und die Phase beträgt 45° . Das entsprechende Ergebnis folgt aus der Ortskurve der Übertragungsfunktion in Abbildung 4.8.

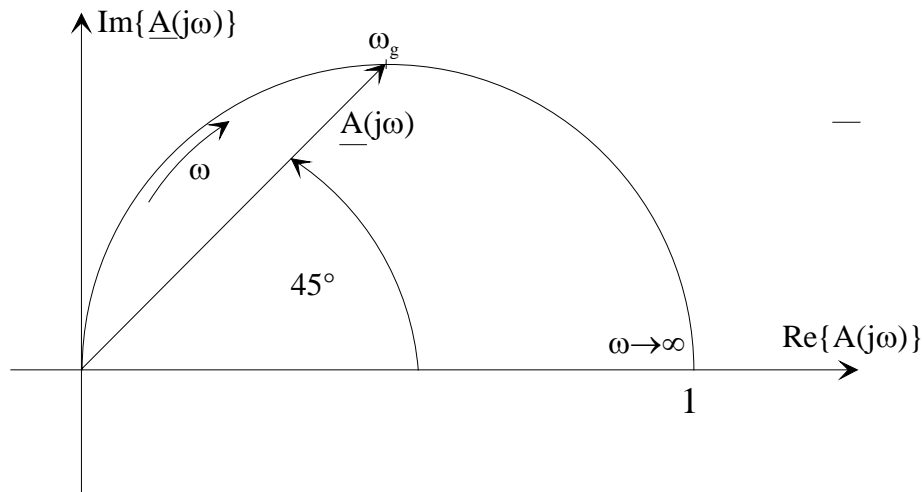


Abbildung 4.8: Ortskurve des Hochpasses

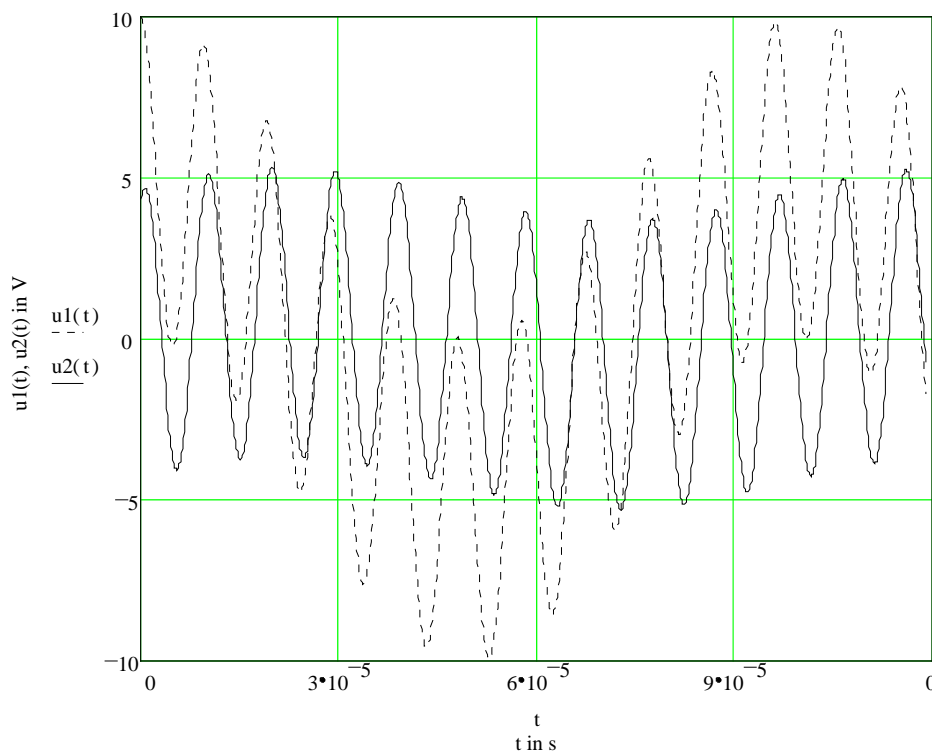


Abbildung 4.9: Beispiel für Hochpaß

In Abbildung 4.9 ist $u_1(t)$ eine Überlagerung von zwei Wechselspannungen mit den Frequenzen 10kHz und 104kHz dargestellt. Der Hochpaß hat die Grenzfrequenz $f_g = 50kHz$. $u_2(t)$ zeigt die nur leicht gedämpfte Wechselspannung von 104kHz (-0,9dB), während die Wechselspannung mit 10kHz stark gedämpft ist (-15,4dB). Es verbleibt nach dem Hochpaß näherungsweise nur das Signal mit der Frequenz oberhalb der Grenzfrequenz.

4.2 Resonanzkreise

Die Impedanz eines zweipoligen Netzwerks aus Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten ist frequenzabhängig. Für bestimmte Frequenzen ω_0 kann die Reaktanz verschwinden: $X(\omega_0) = 0$. Zweipole, die diese Eigenschaft besitzen, werden als **Resonanz-** oder **Schwingkreise** bezeichnet. Resonanzkreise sind Grundbausteine von frequenzselektiven Filterschaltungen. Bei der Resonanzfrequenz f_0 gilt:

$$\underline{Z}(\omega_0) = 0, \underline{Z}(\omega_0) = R(\omega_0) \text{ für } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}. \tag{4.16}$$

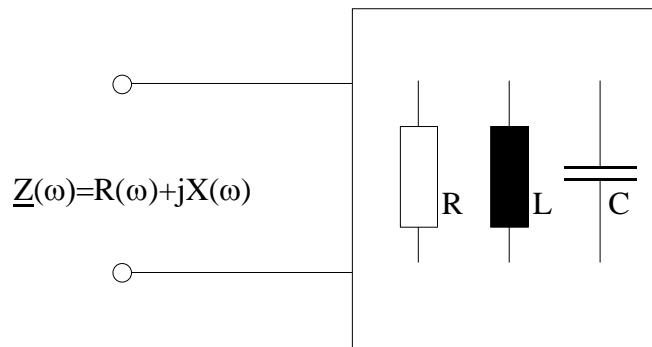


Abbildung 4.10: Zusammengesetzter Zweipol

4.2.1 Serienresonanz

Abbildung 4.11 zeigt einen **Serienresonanzkreis**. Der Widerstand R kann als der Ohmsche Widerstand der Wicklung der Induktivität L aufgefaßt werden. Der mit R_p bezeichnete Verlustwiderstand des Kondensators kann in der Umgebung der Resonanzfrequenz in einen äquivalenten Serienwiderstand umgerechnet werden und ist demnach in R enthalten. Die Impedanz des Serienresonanzkreises beträgt dann:

$$\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX(\omega). \tag{4.17}$$

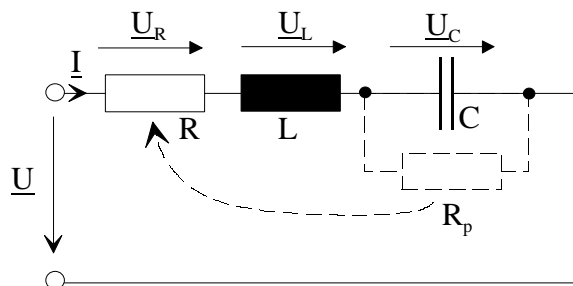


Abbildung 4.11: Serienresonanzkreis

Die Reaktanz $X(\omega)$ verschwindet mit $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ für die Resonanzfrequenz:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (4.18)$$

Bei Resonanz ist die Impedanz reell und minimal:

$$\underline{Z}(\omega_0) = R. \quad (4.19)$$

Der Betrag der Reaktanz von Induktivität und Kapazität bei Resonanzfrequenz wird als **Kennwiderstand** Z_0 bezeichnet:

$$Z_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.20)$$

Bei einem vorgegebenen Strom \underline{I} wird die Spannung \underline{U} am Resonanzkreis in Resonanz minimal:

$$U_0 = |\underline{U}(\omega_0)| = |\underline{I} \cdot \underline{Z}(\omega_0)| = I \cdot R. \quad (4.21)$$

An den Reaktanzen ergibt sich für $R \rightarrow 0$ jedoch eine erheblich höhere Spannung:

$$U_{L0} = U_{C0} = I \cdot Z_0 = I \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \gg U_0. \quad (4.22)$$

Diese starke Spannungsüberhöhung in Resonanz muß bei der Dimensionierung der Bauelemente berücksichtigt werden. Die Resonanzüberhöhung beträgt:

$$\frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{Z_0}{R} = Q. \quad (4.23)$$

Q wird als die **Güte** des Resonanzkreises bezeichnet. Typische Werte für Güten liegen in der Größenordnung 50 .. 200.

Im folgenden soll nun die Impedanz des Resonanzkreises in der Umgebung der Resonanz untersucht werden. Die Impedanz des Resonanzkreises wird auf den Widerstand R bezogen:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}(j\omega)}{R} &= 1 + \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R} = 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 \cdot L}{R} - \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{R \cdot \omega_0 \cdot C}\right), \\ \frac{\underline{Z}(j\omega)}{R} &= 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \cdot Q \end{aligned} \quad (4.24)$$

Der Term

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \cdot \omega_0} \quad (4.25)$$

wird als Verstimmung des Resonanzkreises bezeichnet.

Damit folgt aus (4.24):

$$\frac{\underline{Z}(j\omega)}{R} = 1 + jQ \cdot v \quad (4.26)$$

Für den Betrag der auf R bezogenen Impedanz folgt damit:

$$\frac{Z(\omega)}{R} = \sqrt{1 + Q^2 \cdot v^2} \quad (4.27)$$

(4.27) kann approximiert werden mit:

$$\frac{Z(\omega)}{R} \approx 1 + \frac{Q^2 \cdot v^2}{2} \quad \text{für } |v| \ll \frac{1}{Q}, \quad (4.28)$$

$$\frac{Z(\omega)}{R} \approx Q \cdot |v| \quad \text{für } |v| \gg \frac{1}{Q}. \quad (4.29)$$

Abbildung 4.12 zeigt den Verlauf des Impedanzbetrages. Definiert man als Grenzfrequenz die Frequenz, bei der der Betrag der Impedanz um 3dB (Faktor $\sqrt{2}$) größer als im Resonanzfall ist, so gilt:

$$\frac{Z(\omega_g)}{R} = \sqrt{2} = \sqrt{1 + Q^2 \cdot v_g^2}, \quad (4.30)$$

$$v_g = \frac{\omega_g}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_g} = \pm \frac{1}{Q}. \quad (4.31)$$

(4.31) aufgelöst nach ω_g liefert:

$$\omega_g = \omega_0 \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right). \quad (4.32)$$

Bei hoher Güte ist der Resonanzkreis daher sehr schmalbandig. Für eine typische Güte $Q=100$ beträgt die Bandbreite daher 1 Prozent der Resonanzfrequenz.

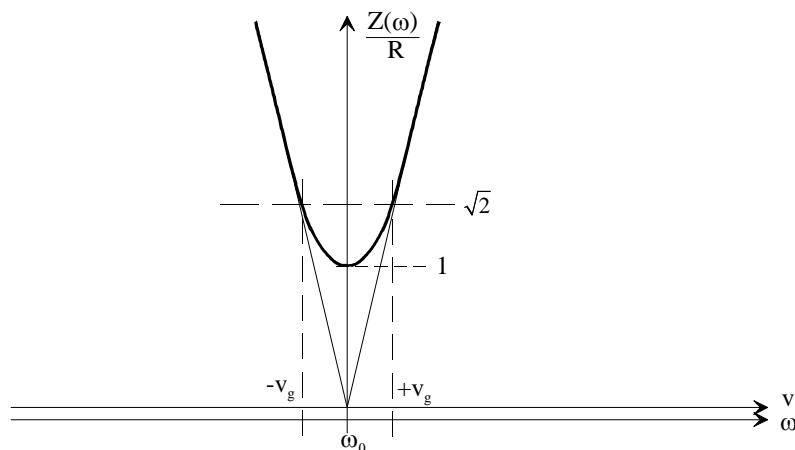


Abbildung 4.12: Betrag der Impedanz des Serienschwingkreises als Funktion der Frequenz

Abbildung 4.13 zeigt eine Anwendung eines Serienresonanzkreises. Die Quelle soll ein Gemisch aus Wechselspannungen unterschiedlicher Frequenzen liefern. Ein Signal einer definierten Frequenz soll nicht übertragen werden, z.B. um Störungen zu vermeiden. Wird der Resonanzkreis auf die Frequenz dieses Signals abgestimmt, fällt, wegen der niedrigen Impedanz des Resonanzkreises für diese Frequenz, das Signal im wesentlichen an der Impedanz der Quelle ab. Im Ausgangssignal ist das Signal dieser Frequenz nur noch stark gedämpft enthalten.

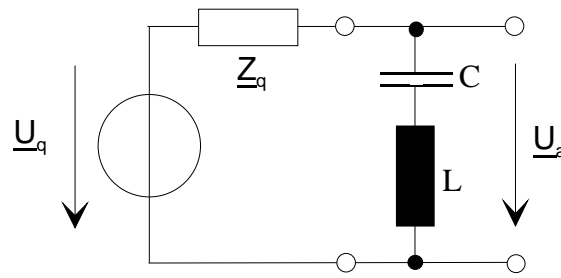


Abbildung 4.13: Anwendung eines Serienresonanzkreises

4.2.2 Parallelresonanz

Abbildung 4.14 zeigt einen **Parallelresonanzkreis**. Der Verlustwiderstand der Wicklung der Induktivität kann in der Umgebung der Resonanzfrequenz in einen äquivalenten Parallelleitwert umgerechnet werden, wie später gezeigt wird, und ist demnach in G enthalten. Die Admittanz des Parallelresonanzkreises beträgt dann:

$$\underline{Y}(j\omega) = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + jB(\omega). \quad (4.33)$$

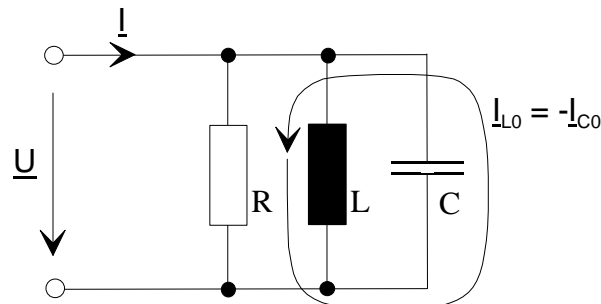


Abbildung 4.14: Parallelresonanzkreis

Die Beziehung für die Admittanz des Parallelresonanzkreises (4.33) entspricht der Beziehung für die Impedanz des Serienresonanzkreises (4.17). Es handelt sich um sog. **duale Netzwerke**. Dies sind Netzwerke, die auseinander hervorgehen, wenn Serien- in Parallelschaltungen und umgekehrt umgewandelt werden. Die Netzwerkgleichungen dualer Netzwerke gehen ineinander über, wenn Elementströme durch –spannungen, Impedanzen durch Admittanzen und umgekehrt ersetzt werden.

Für die Admittanz des Parallelschwingkreises gilt entsprechendes wie für die Impedanz des Serienschwingkreises. In Resonanz gilt insbesondere:

$$\underline{Y}(j\omega_0) = G. \quad (4.34)$$

Für die Güte des Parallelresonanzkreises gilt entsprechend

$$Q = \frac{Y_0}{G} = \frac{1}{G \cdot Z_0} = \frac{1}{G} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (4.35)$$

wobei typische Werte wiederum in der Größenordnung von 50 .. 200 liegen.

Für die Grenzfrequenz gilt entsprechend:

$$\omega_g = \omega_0 \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right). \quad (4.36)$$

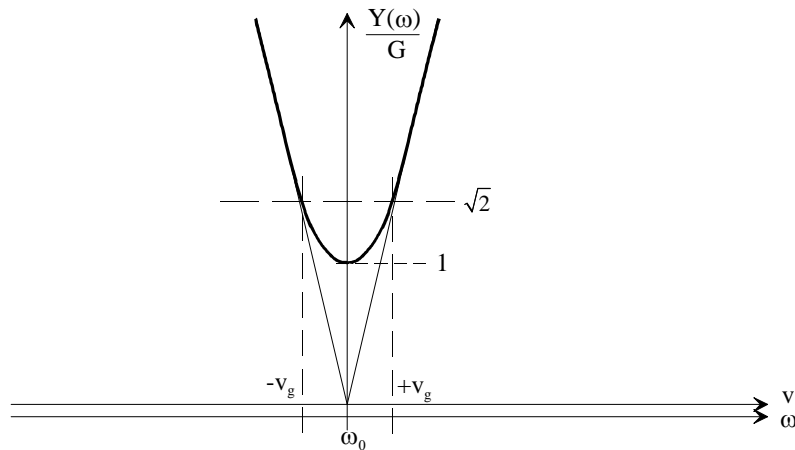


Abbildung 4.15: Betrag der Admittanz des Parallelschwingkreises als Funktion der Frequenz

Der Betrag der Admittanzfunktion ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Die Entsprechung zu Abbildung 4.12 ist offensichtlich. Wie beim Serienresonanzkreis tritt bei Resonanz eine erhebliche Resonanzüberhöhung auf. Diese betrifft statt der Spannungen die Ströme. Bei einem vorgegebenen Spannung \underline{U} wird der Strom \underline{I} am Resonanzkreis in Resonanz minimal:

$$I_0 = |\underline{I}(\omega_0)| = |\underline{U} \cdot \underline{Y}(\omega_0)| = U \cdot G. \quad (4.37)$$

In den Reaktanzen ergibt sich für $G \rightarrow 0$ ein erheblich höherer Strom:

$$\underline{I}_{L0} = \frac{\underline{U}}{j\omega_0 L} = \frac{\underline{U}}{jZ_0} = -\underline{U} \cdot jY_0, \quad \underline{I}_{C0} = \underline{U} \cdot j\omega_0 C = \underline{U} \cdot jY_0, \quad (4.38)$$

$$\frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{Y_0}{G} = Q \gg 1. \quad (4.39)$$

Der Strom in den Impedanzen ist, wie in Abbildung 4.14 dargestellt, ein Kreisstrom, der zum Austausch von Blindleistung zwischen der Induktivität und der Kapazität führt. Elektrische und magnetische Feldenergie pendeln zwischen dem Kondensator und der Induktivität. Dies entspricht beispielsweise einem Fadenpendel, bei dem ein permanenter Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie erfolgt. Der Strom an den Klemmen des Parallelresonanzkreises liefert lediglich die Wirkleistung zum Ersatz der am Leitwert G umgesetzten elektrischen Energie.

Die in Abbildung 4.14 angegebene Schaltung des Parallelschwingkreises ist zunächst unrealistisch, wenn man berücksichtigt, daß die Güte des Resonanzkreises in der Regel vom Ver-

lustwiderstand R_L der Wicklung der Induktivität bestimmt wird. Eine realistischere Ersatzschaltung zeigt **Abbildung 4.16**. Für die Admittanz an den Klemmen gilt jetzt:

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C = \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + j\omega C,$$

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right]. \quad (4.40)$$

Die Resonanzbedingung ist jetzt für die Resonanzfrequenz $\omega_r \neq \omega_0$ mit

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R_L^2 + (\omega_r L)^2} \doteq 0 \quad (4.41)$$

erfüllt. Für die Resonanzfrequenz gilt mit (4.41):

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R_L^2}{\left(\frac{L}{C}\right)}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}. \quad (4.42)$$

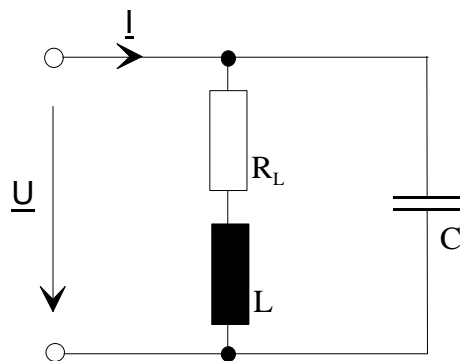


Abbildung 4.16: Parallelresonanzkreis mit Verlustwiderstand der Induktivität

Für hinreichend hohe Güte gilt $\omega_r \approx \omega_0$ und nach (4.40) kann der Verlustwiderstand der Spule R im Resonanzfall durch einen Parallelwiderstand

$$\frac{1}{R} = \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega_r L)^2} \quad (4.43)$$

ersetzt werden. Da der Widerstand R gemäß (4.43) von der Frequenz abhängig ist, besteht die Frage, ob der Ersatz zumindest innerhalb der Bandbreite des Resonanzkreises zulässig ist. Wegen der üblicherweise hohen Güte ist die Bandbreite sehr gering, d.h. R verändert sich innerhalb der Bandbreite nur sehr wenig. Daraus folgt, daß **Abbildung 4.14** tatsächlich eine zulässige Ersatzschaltung für die in **Abbildung 4.16** dargestellte Schaltung ist, wenn R gemäß (4.43) gewählt wird.

Abbildung 4.17 zeigt eine typische Anwendung eines Parallelresonanzkreises. Die skizzierte Antenne empfängt eine Vielzahl von Sendersignalen unterschiedlicher Frequenz. Der Antennenstrom fließt über den Resonanzkreis. Wegen der hohen Impedanz für die Frequenz, auf den der Kreis abgestimmt ist, wird die Ausgangsspannung insbesondere dieses Signal enthalten, während die Signale anderer Frequenzen gedämpft werden. Zur Abstimmung des Schwingkreises wurden früher mechanisch veränderbare Kondensatoren (Drehkondensator) verwendet.

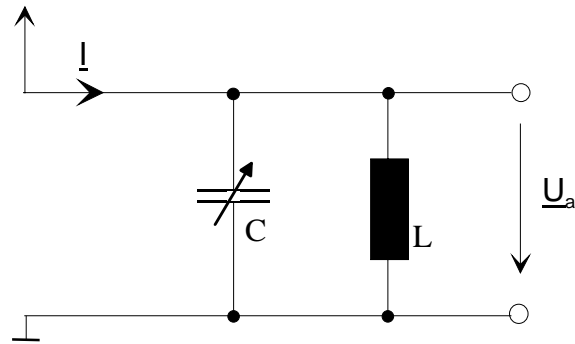


Abbildung 4.17: Anwendung eines Parallelresonanzkreises



Abbildung 4.18: Drehkondensator

5 Die homogene Doppelleitung

Die Wirkung lokaler zeitveränderlicher elektrischer und magnetischer Felder breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit im freien Raum als **elektromagnetische Welle** aus. Elektromagnetische Wellen können durch elektrische Leiter geführt werden. Im folgenden soll lediglich die homogene Doppelleitung untersucht werden, die als Zweidrahtleitung, als geschirmte Zweidrahtleitung oder als Koaxialleitung realisiert werden kann. Derartige Doppelleitungen werden als homogen bezeichnet, wenn sich ihre elektrischen Eigenschaften längs der Leitung nicht ändern.

Die Leitungsgleichungen werden im folgenden aus einer heuristischen Ersatzschaltung für ein Leitungsstück hergeleitet, ohne daß untersucht werden wird, ob diese diskrete Ersatzschaltung ein zulässiges Modell für das betrachtete Leitungsstück darstellt. Der Nachweis der Gültigkeit der Ersatzschaltung und die Frage, unter welchen Bedingungen die Ersatzschaltung gültig ist, wird nicht untersucht. Dies wird z.B. den Lehrveranstaltungen zur elektromagnetischen Feldtheorie vorbehalten. Unabhängig davon ergeben sich einige interessante Einsichten in die Eigenschaften von Leitungen. Dies und die Möglichkeit, die Anwendung der komplexen Operatorenrechnung zu üben, ist hinreichend Motivation für dieses Kapitel.

5.1 Die Leitungsgleichungen der homogenen Doppelleitung

Es soll zunächst ein kurzes Leitungsstück der Länge Δx betrachtet werden. Dabei wird von harmonischen Wechselgrößen ausgegangen, die durch komplexe Zeiger beschrieben werden.

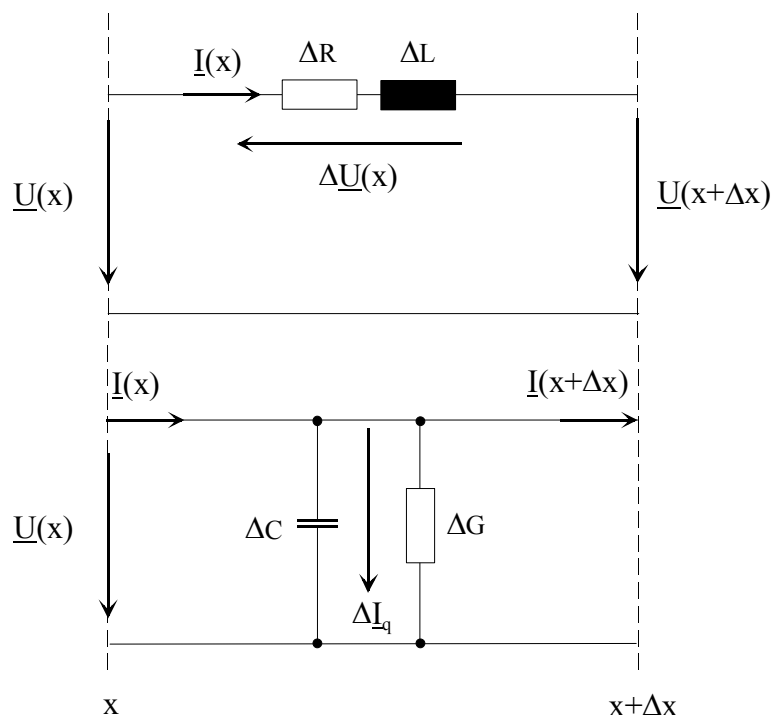


Abbildung 5.1: Leitungsstück

Das Leitungsstück besitzt einen Ohmschen Widerstand ΔR , eine Induktivität ΔL , eine Kapazität ΔC zwischen den Leitern und, da die Isolation nicht ideal ist, einen Leitwert ΔG zwischen den Leitern. Die genannten Größen werden auf die Länge bezogen. Das führt zu den Definitionen:

$$R' = \frac{\Delta R}{\Delta x}, \text{ Widerstandsbelag,} \tag{5.1}$$

$$L' = \frac{\Delta L}{\Delta x}, \text{ Induktivitätsbelag,} \tag{5.2}$$

$$G' = \frac{\Delta G}{\Delta x}, \text{ Leitwertbelag,} \tag{5.3}$$

$$C' = \frac{\Delta C}{\Delta x}, \text{ Kapazitätsbelag,} \tag{5.4}$$

Der Spannungsabfall längs des Leitungsstück lässt sich durch die in Abbildung 5.1 oben dargestellte Ersatzschaltungen beschreiben:

$$\Delta \underline{U}(x) = \underline{U}(x + \Delta x) - \underline{U}(x) = -(\Delta R + j\omega \Delta L) \cdot \underline{I}(x) = -(R' + j\omega L') \cdot \underline{I}(x) \cdot \Delta x. \tag{5.5}$$

Dabei wurde, der Einfachheit halber, die gesamte Impedanz von Hin- und Rückleiter dem Hinleiter zugeordnet, während der Rückleiter als ideal angenommen wird. Für den „Stromverlust“ längs der Leiter ist die Queradmittanz verantwortlich:

$$\Delta \underline{I}(x) = \underline{I}(x + \Delta x) - \underline{I}(x) = -\Delta \underline{I}_q(x) = -(\Delta G + j\omega \Delta C) \cdot \underline{U}(x) = -(G' + j\omega C') \cdot \underline{U}(x) \cdot \Delta x \tag{5.6}$$

Abbildung 5.2 zeigt daraus abgeleitet zwei symmetrische Ersatzschaltbilder eines kurzen Leitungsstücks. Das obere Ersatzschaltbild wird als π -Ersatzschaltbild, das untere wird als T-Ersatzschaltbild bezeichnet.

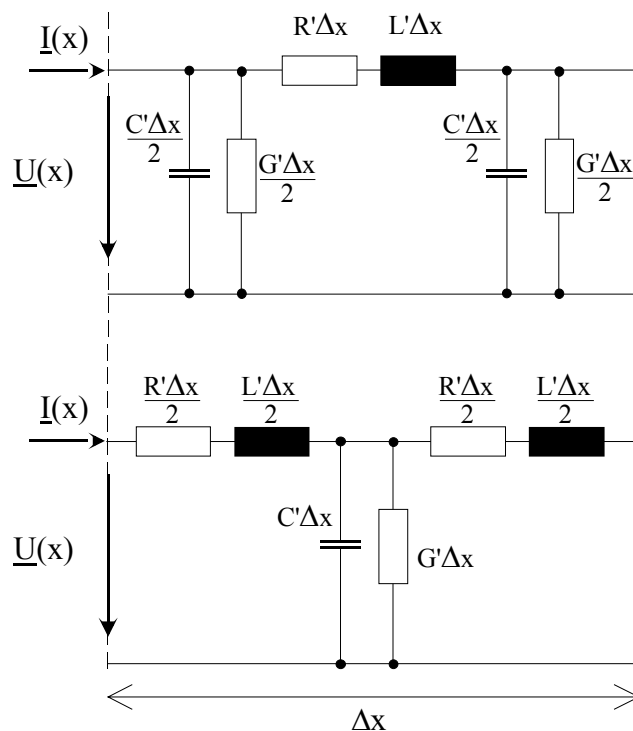


Abbildung 5.2: Ersatzschaltbilder eines kurzen Leitungsstücks

Werden (5.5) und (5.6) durch Δx dividiert ergibt sich nach Grenzwertbildung $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = -(R' + j\omega L') \cdot \underline{I}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -(G' + j\omega C') \cdot \underline{U}. \quad (5.8)$$

Wird (5.7) nach x differenziert und (5.8) eingesetzt, dann folgt:

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial x^2} = -(R' + j\omega L') \cdot \frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \cdot \underline{U}. \quad (5.9)$$

Entsprechend folgt durch Differentiation von (5.8) und Einsetzen von (5.7):

$$\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial x^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \cdot \underline{I}. \quad (5.10)$$

Definiert man die **komplexe Übertragungskonstante**:

$$\underline{\gamma}^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \text{ mit} \quad (5.11)$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \quad \alpha: \text{Dämpfungskonstante, } \beta: \text{Phasenkonstante,} \quad (5.12)$$

ergeben sich die **Telegrafengleichungen**

$$\frac{\partial^2 \underline{U}(x)}{\partial x^2} - \underline{\gamma}^2 \cdot \underline{U}(x) = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}(x)}{\partial x^2} - \underline{\gamma}^2 \cdot \underline{I}(x) = 0, \quad (5.14)$$

als gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung. Diese besitzen die Lösung

$$\underline{U}(x) = \underline{U}' \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}'' \cdot e^{\underline{\gamma}x}, \quad (5.15)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}' \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{I}'' \cdot e^{\underline{\gamma}x}. \quad (5.16)$$

was einfach durch Einsetzen der Lösungen in (5.13) und (5.14) überprüft werden kann. Die Lösungen sind damit bis auf die komplexen Konstanten $\underline{U}', \underline{U}'', \underline{I}', \underline{I}''$ bekannt.

Wird (5.15) nach x differenziert und zusammen mit (5.16) in (5.7) eingefügt, dann ergibt sich:

$$-\underline{\gamma} \cdot \underline{U}' \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{\gamma} \cdot \underline{U}'' \cdot e^{\underline{\gamma}x} + (R' + j\omega L')(\underline{I}' \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{I}'' \cdot e^{\underline{\gamma}x}) = 0, \quad (5.17)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{\gamma}}{R' + j\omega L'} \cdot \underline{U}' = \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_L}, \quad (5.18)$$

$$\underline{I}'' = -\frac{\underline{\gamma}}{R' + j\omega L'} \cdot \underline{U}'' = -\frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_L}. \quad (5.19)$$

\underline{Z}_L ist der **Wellenwiderstand** der Doppelleitung mit:

$$\underline{Z}_L = \frac{R' + j\omega L'}{\underline{\gamma}} = \frac{R' + j\omega L'}{\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}. \quad (5.20)$$

Für die Lösungen der Telegrafengleichungen (5.15), (5.16) folgt damit:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}' \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}'' \cdot e^{\underline{\gamma}x}, \quad (5.21)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_L} \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} - \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_L} \cdot e^{\underline{\gamma} \cdot x}. \quad (5.22)$$

Die Lösungen sollen nun interpretiert werden, indem die komplexen Zeitfunktionen von Strom und Spannung betrachtet werden. Für die Spannung ergibt sich dann:

$$\underline{U}(x, t) = \underline{U}(x) \cdot e^{j\omega t} = \underline{U}' \cdot e^{j\omega t - \underline{\gamma} \cdot x} + \underline{U}'' \cdot e^{j\omega t + \underline{\gamma} \cdot x}. \quad (5.23)$$

Mit (5.12) folgt:

$$\underline{U}(x, t) = \underline{U}' \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\omega t - \beta \cdot x)} + \underline{U}'' \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\omega t + \beta \cdot x)}. \quad (5.24)$$

Der erste Term stellt offensichtlich eine Spannungswelle dar, die sich vom Leitungsanfang in Richtung Leitungsende ausbreitet. Für einen Ort gleicher Phase gilt für diese Welle:

$$\omega \cdot t - \beta \cdot x = \text{const}. \quad (5.25)$$

In einem Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ bewegt sich dieser Ort um $\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{\omega}{\beta}(t_1 - t_0) = v \cdot \Delta t$.

v wird daher als **Phasengeschwindigkeit**

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (5.26)$$

der **hinlaufenden** Welle bezeichnet. Durch den Term $e^{-\alpha \cdot x}$ wird die Amplitude mit zunehmendem Abstand vom Leitungsanfang gedämpft. Abbildung 5.3 zeigt eine hinlaufende Welle mit einer Frequenz von 1 MHz zu zwei verschiedenen Zeitpunkten mit einem Zeitunterschied von $t_1 - t_0 = 0,3 \cdot T$ (T : Periodendauer). Bei einem Wellenzug ist der Abstand zweier Orte gleicher Phase das Vielfache der Wellenlänge λ mit

$$\lambda = \frac{\omega \cdot T}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} = v \cdot T. \quad (5.27)$$

Abbildung 5.4 zeigt entsprechend die **rücklaufende Welle**.

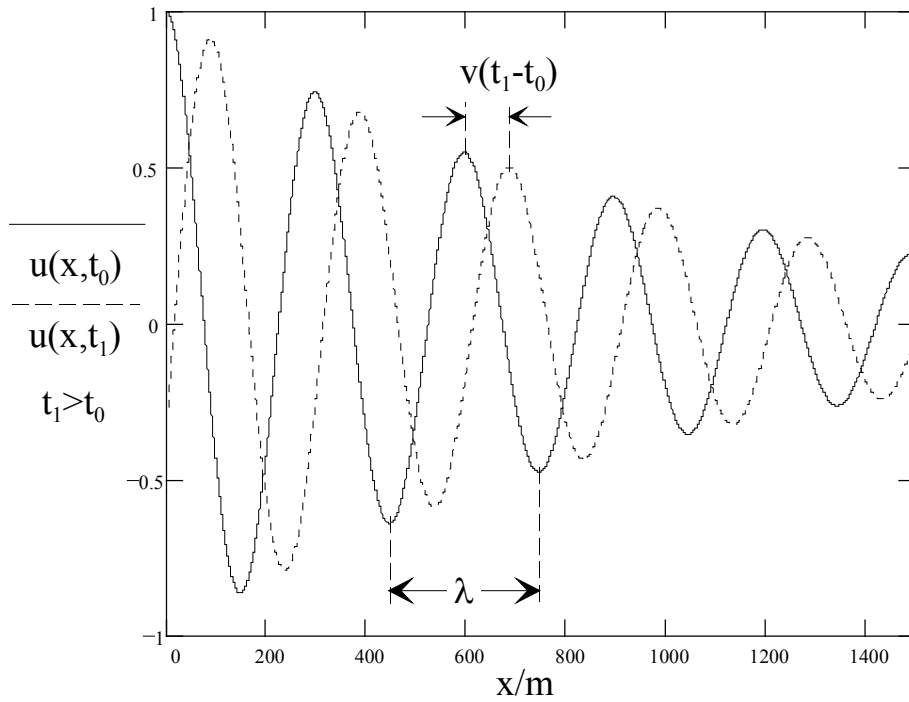


Abbildung 5.3: Augenblicksaufnahme der hinlaufende Welle

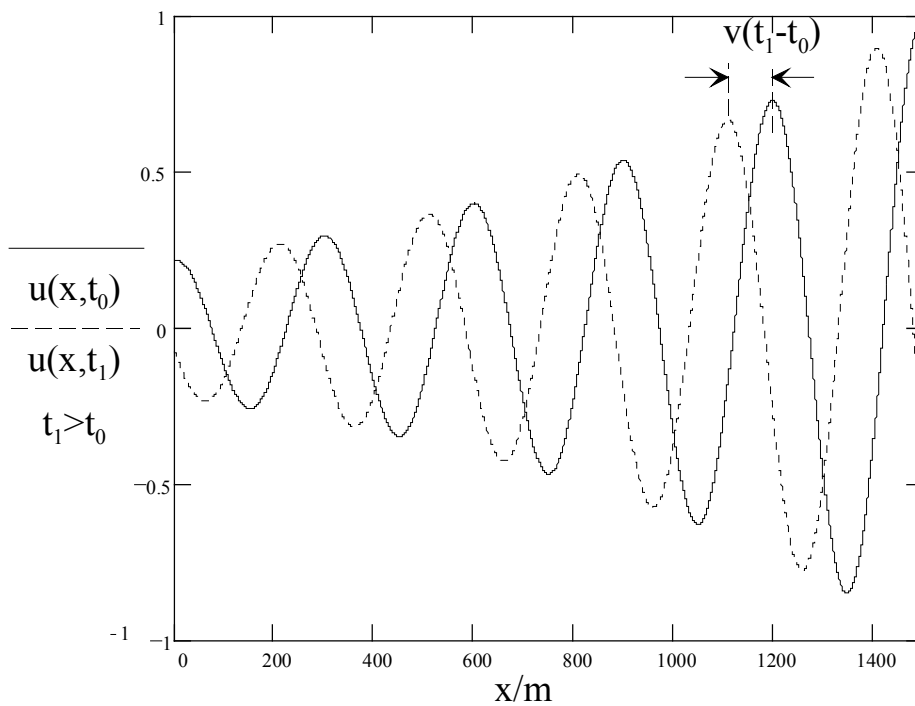


Abbildung 5.4: Augenblicksaufnahme der rücklaufende Welle

5.2 Abgeschlossene Leitung

Abbildung 5.5 zeigt eine Leitung der Länge l , die am Ende mit der Impedanz Z_2 abgeschlossen ist. Für \underline{U}_2 gilt demnach:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}(l) = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2. \quad (5.28)$$

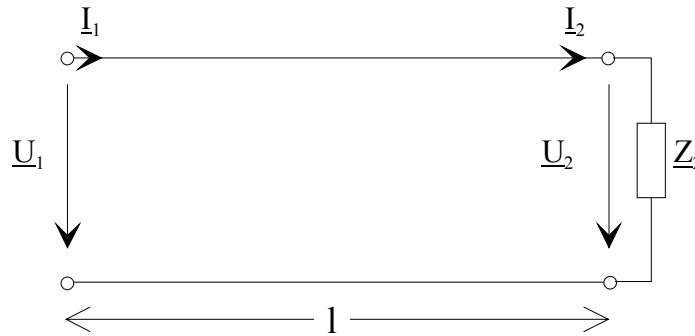


Abbildung 5.5: Mit Impedanz \underline{Z}_2 abgeschlossene Leitung der Länge l

Setzt man (5.28) in (5.21) und (5.22) ein, können \underline{U}' und \underline{U}'' zu

$$\underline{U}' = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L) \cdot e^{\gamma l}, \quad (5.29)$$

$$\underline{U}'' = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L) \cdot e^{-\gamma l}. \quad (5.30)$$

bestimmt werden. Eingesetzt in (5.21) folgt daraus:

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L) \cdot e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L) \cdot e^{-\gamma(l-x)} = \underline{U}_h(x) + \underline{U}_r(x). \quad (5.31)$$

Der erste Term $\underline{U}_h(x)$ beschreibt die hinlaufende Welle. Entsprechend beschreibt $\underline{U}_r(x)$ die rücklaufende Welle. Am Leitungsende gilt für das Verhältnis von rücklaufender zu hinlaufender Welle das Verhältnis

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L}, \quad (5.32)$$

das als **Reflektionsfaktor** bezeichnet wird. Anschaulich gesehen wird die hinlaufende Welle am Leitungsende mit dem komplexen Faktor \underline{r} reflektiert. Von Interesse ist nun der Eingangswiderstand der mit \underline{Z}_2 abgeschlossenen Leitung. (5.29) und (5.30) eingefügt in (5.21) und (5.22) ergibt für den Leitungsanfang:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}(0) = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \left[(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L) \cdot e^{\gamma l} + (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L) \cdot e^{-\gamma l} \right] = \underline{I}_2 \left[\underline{Z}_2 \cosh \gamma l + \underline{Z}_L \sinh \gamma l \right], \quad (5.33)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}(0) = \frac{1}{2} \frac{\underline{I}_2}{\underline{Z}_L} \left[(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L) \cdot e^{\gamma l} - (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L) \cdot e^{-\gamma l} \right] = \frac{\underline{I}_2}{\underline{Z}_L} \left[\underline{Z}_2 \sinh \gamma l + \underline{Z}_L \cosh \gamma l \right]. \quad (5.34)$$

Für den Eingangsimpedanz folgt damit:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}(0) = \underline{Z}_2 \frac{\left[\cosh \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh \underline{\gamma} l \right]}{\left[\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh \underline{\gamma} l + \cosh \underline{\gamma} l \right]} = \underline{Z}_2 \frac{1 + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \tanh \underline{\gamma} l}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh \underline{\gamma} l}. \quad (5.35)$$

Im folgenden sollen drei spezielle Fälle des Leitungsabschlusses betrachtet werden:

Mit Wellenwiderstand $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L$ abgeschlossene oder „angepaßte“ Leitung:

Für den Reflektionsfaktor gilt

$$\underline{r}(\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L) = 0, \quad (5.36)$$

d.h., die hinlaufende Welle wird nicht reflektiert. Es existiert demnach nur die hinlaufende Welle. Die Eingangsimpedanz wird gemäß (5.35) gleich dem Wellenwiderstand:

$$\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L) = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_L. \quad (5.37)$$

Kurzgeschlossene Leitung $\underline{Z}_2 = 0$:

Die Spannung am Leitungsende muß verschwinden. Dies ist anschaulich erfüllt, wenn die hinlaufende Spannungswelle am Leitungsende mit entgegengesetztem Vorzeichen reflektiert wird ($\underline{U}_h(x=l) = -\underline{U}_r(x=l)$). Entsprechendes erkennt man am Reflexionsfaktor (5.32) für den gilt:

$$\underline{r}(\underline{Z}_2 = 0) = -1. \quad (5.38)$$

Aus (5.35) folgt für die **Kurzschluß-Eingangsimpedanz:**

$$\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_1(\underline{Z}_2 = 0) = \underline{Z}_L \tanh \underline{\gamma} l. \quad (5.39)$$

Leerlaufende Leitung $\underline{Z}_2 = \infty$:

Der Strom am Leitungsende muß verschwinden. Dies ist nach (5.21) anschaulich erfüllt, wenn die hinlaufende Stromwelle am Leitungsende die rücklaufende Stromwelle auslöscht. Dies erfordert aber $\underline{U}'_h(x=l) = \underline{U}'_r(x=l)$). Entsprechendes erkennt man am Reflexionsfaktor (5.32) für den gilt:

$$\underline{r}(\underline{Z}_2 = \infty) = 1. \quad (5.40)$$

Aus (5.35) folgt für den **Leerlauf-Eingangsimpedanz:**

$$\underline{Z}_{1l} = \underline{Z}_1(\underline{Z}_2 = \infty) = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh \underline{\gamma} l}. \quad (5.41)$$

Nach (5.39) und (5.41) können die Leitungsparameter aus Leerlauf- und Kurzschlußmessungen bestimmt werden:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{1k} \underline{Z}_{1l}}, \quad (5.42)$$

$$\tanh \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1l}}}, \quad \underline{\gamma} = \frac{1}{l} \operatorname{ar} \tanh \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1l}}}. \quad (5.43)$$

5.3 Verlustlose Leitung

Beim Modell der verlustlosen Leitung wird vorausgesetzt, daß Längswiderstand und Querleitwert der Leitung zu vernachlässigen sind ($R' \rightarrow 0, G' \rightarrow 0$), so daß sämtliche ohmschen Verluste auf der Leitung verschwinden. Die Übertragungskonstante wird damit imaginär:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega\sqrt{L'C'}. \quad (5.44)$$

Für Dämpfung und Phasenkonstante folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'}, \quad (5.45)$$

und der Wellenwiderstand wird reell:

$$\underline{Z}_L = Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (5.46)$$

Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge ergeben sich dann zu:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}, \quad (5.47)$$

$$\lambda = \frac{\omega \cdot T}{\beta} = v \cdot T = \frac{T}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{f \cdot \sqrt{L'C'}}. \quad (5.48)$$

5.3.1 Kurzgeschlossene, verlustlose Leitung

Aus (5.31) folgt mit $\underline{Z}_2 = 0$:

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_L \cdot (e^{j\beta(l-x)} - e^{-j\beta(l-x)}). \quad (5.49)$$

Wird der Strom am \underline{I}_2 am Leitungsende willkürlich in die reelle Achse gelegt, folgt für die reelle Zeitfunktion $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}(x) \cdot e^{j\omega t} \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 \cdot Z_L \cdot [\cos(\omega t + \beta(l-x)) - \cos(\omega t - \beta(l-x))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 \cdot Z_L \cdot [\cos \omega t \cdot \cos \beta(l-x) - \sin \omega t \cdot \sin \beta(l-x) - \cos \omega t \cdot \cos \beta(l-x) - \sin \omega t \cdot \sin \beta(l-x)] \end{aligned}$$

$$u(x,t) = \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot Z_L \cdot \sin \beta(l-x) \cdot \sin \omega t = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin \beta(l-x) \cdot \sin \omega t. \quad (5.50)$$

(5.50) stellt eine stehende Welle dar. An den Stellen

$$\beta(l - x_{u0}) = k \cdot \pi, \quad l - x_{u0} = k \cdot \frac{\pi}{\beta} = k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (5.51)$$

$$x_{u0} = l - k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.52)$$

befinden sich **Spannungsknoten**, d.h. dort verschwindet die Spannung. Entsprechend wird an den Stellen

$$\beta(l - x_{um}) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad x_{um} = l - \frac{\lambda}{4} - k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.53)$$

die Amplitude der Spannung maximal. Dort befindet sich jeweils ein **Spannungsbauch**. Abbildung 5.6 zeigt den Verlauf der Spannungswelle für unterschiedliche Zeitpunkte. Dabei wurde der Nullpunkt des Koordinatensystems ans Leitungsende gelegt.

Mit (5.22)

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_L} \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_L} \cdot e^{\gamma \cdot x}$$

folgt aus (5.49)

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_L \cdot (e^{j\beta(l-x)} - e^{-j\beta(l-x)}).$$

für den komplexen Strom auf der kurzgeschlossenen Leitung:

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2} \underline{I}_2 \cdot (e^{j\beta(l-x)} + e^{-j\beta(l-x)}). \quad (5.54)$$

Daraus kann der Stromverlauf über die Leitung mit

$$i(x, t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \beta(l - x) \cdot \cos \omega t. \quad (5.55)$$

bestimmt werden. Der Strom verschwindet an den Stellen

$$x_{i0} = l - \frac{\lambda}{4} - k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.56)$$

Die Amplitude des Stromes wird entsprechend an den Stellen

$$x_{im} = l - k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.57)$$

maximal. Stromknoten befinden sich demnach an den Orten der Spannungsbäuche und umgekehrt. Zusätzlich sind Strom und Spannung um eine Viertelperiode zeitlich verschoben, d.h. die Strommaxima treten zeitlich auf, wenn die Spannung auf der Leitung verschwindet. Umgekehrt treten die Spannungsmaxima auf, wenn der Strom auf der Leitung verschwindet. Offensichtlich werden die Energieformen periodisch ausgetauscht. Beim Strommaximum ist die Energie vollständig im magnetischen Feld der Leitung gespeichert, während beim Spannungsmaximum die Energie vollständig im elektrischen Feld der Leitung gespeichert ist. Die Energie pendelt zeitlich zwischen elektrischer und magnetischer Energie. Wirkleistung wird auf der Leitung nicht verbraucht.

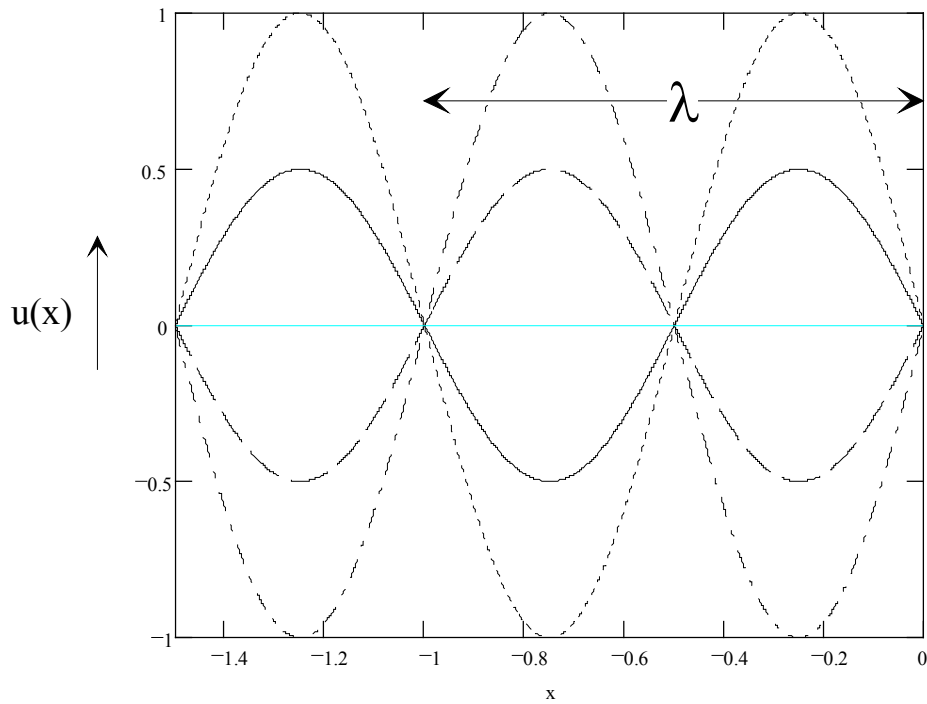


Abbildung 5.6: Stehende Spannungswelle bei kurzgeschlossener Leitung

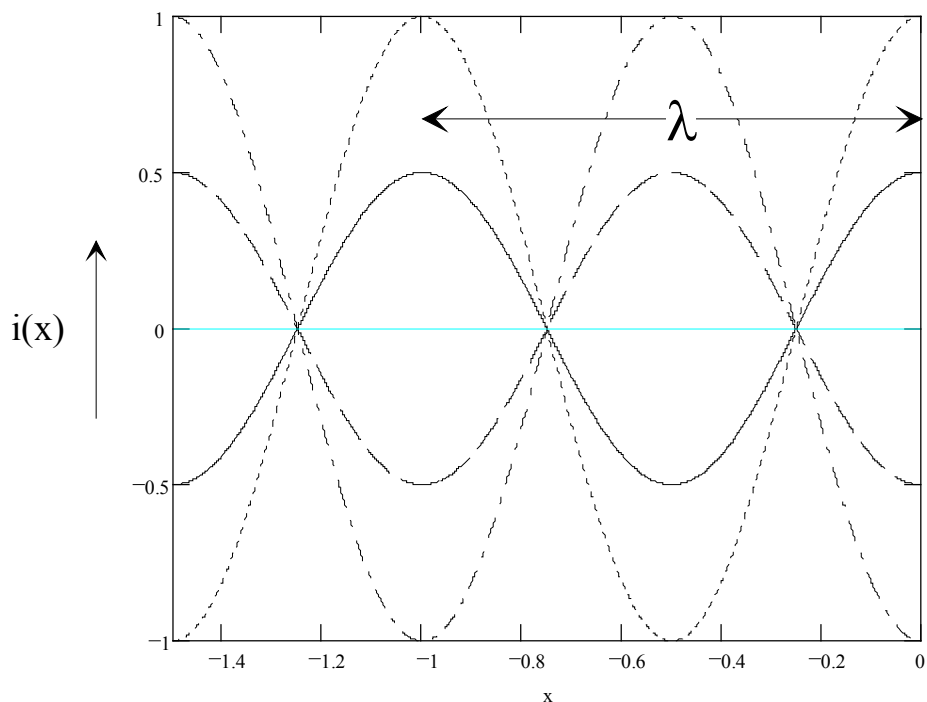


Abbildung 5.7: Stehende Stromwelle bei kurzgeschlossener Leitung

Die Eingangsimpedanz der kurzgeschlossenen, verlustlosen Leitung folgt aus (5.39) für $\underline{\gamma} = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\underline{Z}_L = Z_L$ nach (5.46):

$$\underline{Z}_{lk} = Z_L \tanh j2\pi \frac{l}{\lambda} = jZ_L \tan 2\pi \frac{l}{\lambda} = jX_{lk}. \quad (5.58)$$

Da die Leitung keine Wirkleistung aufnimmt, handelt es folgerichtig um eine Reaktanz, deren Wert von der Länge der Leitung abhängt. Abbildung 5.8 zeigt die Abhängigkeit der Impedanz von der Leitungslänge. Für Leitungen bis zu einem Viertel der Wellenlänge, wirkt der Eingang induktiv. Darüber bis zur halben Wellenlänge wirkt sie kapazitiv. Leitungen der Länge Null und einem Vielfachen der halben Wellenlänge verhalten sich wie Serienschwingkreise in Resonanz (Stromresonanz), d.h. die Impedanz verschwindet. Leitungen mit der halben Wellenlänge verhalten sich wie Parallelschwingkreise in Resonanz (Spannungsresonanz), d.h. die Impedanz wird unendlich. Das Verhalten wiederholt sich mit einem Vielfachen der halben Wellenlänge.

$$\text{induktiv:} \quad 0 \leq l - k \cdot \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.59)$$

$$\text{kapazitiv:} \quad \frac{\lambda}{4} \leq l - k \cdot \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.60)$$

$$\text{Stromresonanz:} \quad k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.61)$$

$$\text{Spannungsresonanz:} \quad \frac{\lambda}{4} + k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.62)$$

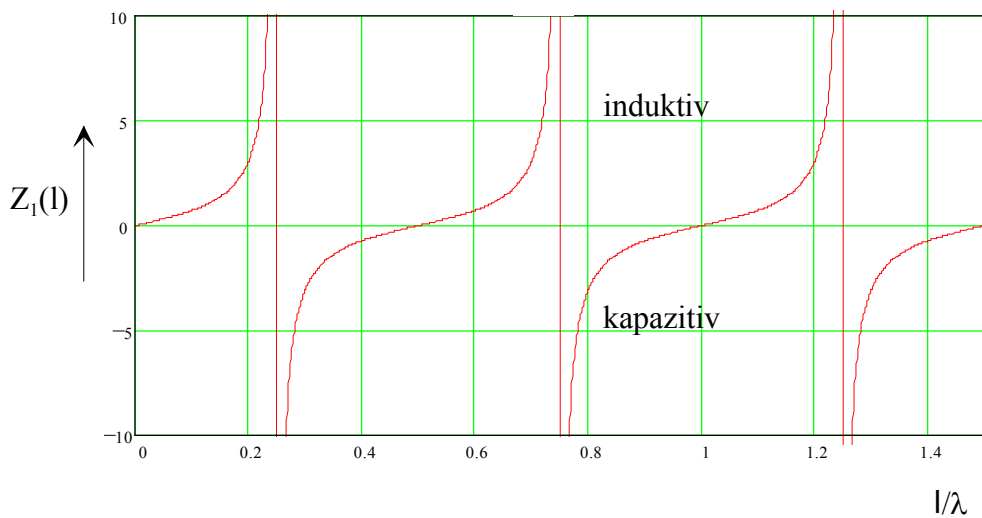


Abbildung 5.8: Eingangreaktanz der kurzgeschlossenen, verlustlosen Leitung

5.3.2 Offene, verlustlose Leitung

Bei der offenen Leitung befindet sich ein Spannungsknoten am Leitungsende. Sie verhält sich, als sei am Ende eine kurzgeschlossene Leitung mit einer Länge, die einer Viertelwellenlänge entspricht, angeschlossen. Eine offene Leitung der Länge $0 \leq l < \frac{\lambda}{4}$ verhält sich demnach kapazitiv.

$$X_{ll} = Z_L \tan\left(2\pi \frac{l + \frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right) = Z_L \tan\left(2\pi\left(\frac{l}{\lambda} + \frac{1}{4}\right)\right) = -\cot\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right). \quad (5.63)$$

5.3.3 Mit Reaktanz X_2 abgeschlossene, verlustlose Leitung

Eine Induktivität L verhält sich wie eine kurzgeschlossene Leitung, deren Länge kleiner ein Viertel der Wellenlänge ist und sich wie folgt ergibt:

$$X_{lk} = \omega \cdot L = Z_L \tan 2\pi \frac{l}{\lambda}, \quad l = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \frac{\omega \cdot L}{Z_L}. \quad (5.64)$$

Eine mit einer Induktivität abgeschlossene Leitung verhält sich demnach wie eine Leitung, die mit einer kurzgeschlossenen Leitung der entsprechenden Länge abgeschlossen ist.

Eine Kapazität C verhält sich wie eine offene Leitung, deren Länge kleiner ein Viertel der Wellenlänge ist und sich wie folgt ergibt:

$$X_{ll} = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -Z_L \cot 2\pi \frac{l}{\lambda} = -\frac{Z_L}{\tan 2\pi \frac{l}{\lambda}}, \quad l = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \omega \cdot C \cdot Z_L. \quad (5.65)$$

Eine mit einer Kapazität abgeschlossene Leitung verhält sich demnach wie eine Leitung, die mit einer offenen Leitung der entsprechenden Länge abgeschlossen ist.

5.3.4 Mit Ohmschem Widerstand R_2 abgeschlossene, verlustlose Leitung

Für die Eingangsimpedanz einer mit Z_2 abgeschlossenen Leitung ergab sich nach (5.35):

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \frac{1 + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \tanh \gamma l}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh \gamma l}. \quad (5.66)$$

Für die mit R_2 abgeschlossene verlustlose Leitung folgt damit:

$$\underline{Z}_1 = R_2 \frac{1 + \frac{Z_L}{R_2} \tanh j\beta \cdot l}{1 + \frac{R_2}{Z_L} \tanh j\beta \cdot l} = R_2 \frac{1 + j \frac{Z_L}{R_2} \tan \beta \cdot l}{1 + j \frac{R_2}{Z_L} \tan \beta \cdot l}. \quad (5.67)$$

Für die angepaßte Leitung mit $R_2 = Z_L$ ist $\underline{Z}_1 = R_2$, d.h. der Eingangswiderstand ist gleich dem Lastwiderstand. Die Leitung nimmt lediglich Wirkleistung und keine Blindleistung auf.

Abbildung 5.9 zeigt für $\frac{Z_L}{R_2} = 2$ die Eingangsimpedanz parametrisiert mit der Leitungslänge.

Bei verschwindender Leitungslänge muß die Eingangsimpedanz offensichtlich gleich dem Lastwiderstand werden. Wegen der Periodizität des Tangens ergibt sich diese Eingangsimpedanz jeweils bei $l = k \cdot \frac{\lambda}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Wegen des Pols des Tangens für $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ wird die Eingangsimpedanz reell jeweils für $l = \frac{\lambda}{4} + k \cdot \frac{\lambda}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

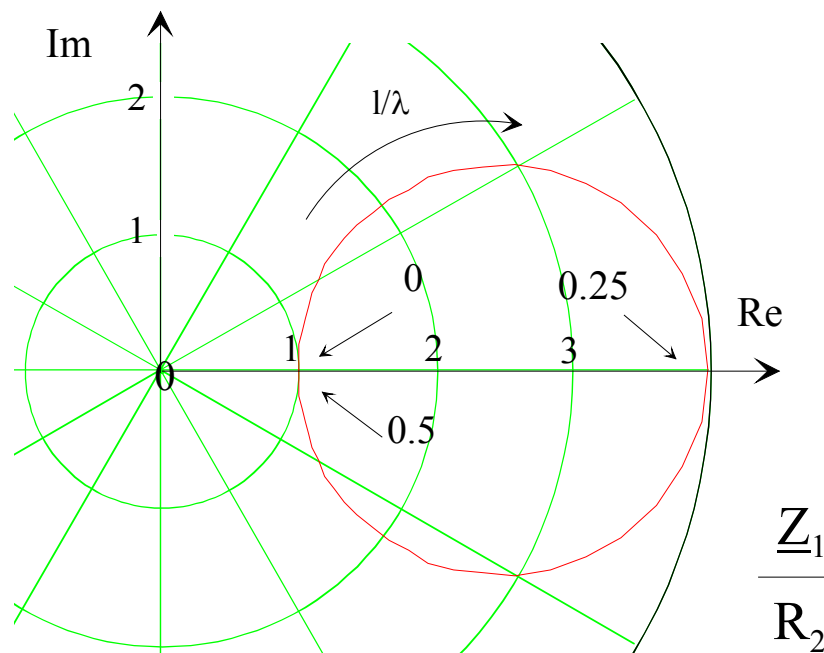


Abbildung 5.9: Impedanz der Leitung in Abhängigkeit von der Leitungslänge ($\frac{Z_L}{R_2} = 2$)